Cours de mathématiques – 2025/2026

PCSI

Vésale Nicolas

Alphabet grec

Majuscule	Minuscule	Prononciation
	α	Alpha
	β	Beta
Γ	γ	Gamma
Δ	δ	Delta
	ϵ	Epsilon
	ζ	Zeta
	η	Eta
Θ	θ	Theta
	ι	Iota
	κ	Kappa
Λ	λ	Lambda
	μ	Mu
	ν	Nu
Ξ	ξ	Xi
Π	π	Pi
	ρ	Rho
Σ	σ	Sigma
	τ	Tau
	υ	Upsilon
Φ	φ	Phi
	χ	Chi
Ψ	ψ	Psi
Ω	ω	Omega

Table des matières

Chapitre 1

Rudiments de logique et de théorie des ensembles

1.1 Rudiments de logique

La logique est la grammaire des mathématiques. Elle permet d'articuler des *propositions*, qui sont des énoncés mathématiques supposés vrais ou faux (on écrira V ou F) à l'aide de connecteurs logiques. Le tableau suivant résume les règles d'utilisation des principaux opérateurs logiques :

P	Q	non(P)	P ou Q	P et Q	P$\Longrightarrow$ Q
V	V	F	V	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	V	V	F	V
F	F	V	F	F	V

Remarque(s) 1 : Presque tout le contenu de ce tableau devrait vous paraître naturel, à l'exception d'un point : le *ou* mathématique n'est pas exclusif. Plus précisément, la proposition :

« il fait beau aujourd'hui » *ou* « il n'y a pas de nuages »

est une proposition vraie s'il fait beau et qu'il n'y a pas de nuages.

Les autres opérations logiques se définissent à partir de celles-ci, par exemple, l'équivalence est définie par :

$$P \Longleftrightarrow Q \overset{Def.}{=} (P \Longrightarrow Q) \text{ et } (Q \Longrightarrow P).$$

En particulier, une équivalence se prouve presque toujours en montrant deux implications successives, que l'on appelle implication directe ($P \Longrightarrow Q$) et réciproque ($Q \Longrightarrow P$). Notez qu'on peut vérifier en utilisant la table ci-dessus que l'équivalence logique correspond bien à l'égalité des valeurs de vérité des propositions.

Exemple(s) 1 :

1.1 Montrons qu'un réel est strictement positif si et seulement si c'est l'exponentielle d'un réel.

(a) *Réciproque :* Si $x = e^y$ alors par définition de la fonction exponentielle, $x > 0$.

(b) *Sens direct :* Si $x > 0$ alors on peut écrire

$$x = \exp(\underbrace{\ln(x)}_{=y})$$

donc x est l'exponentielle d'un réel.

1.2 Attention à toujours vérifier les réciproques. Résolvons par exemple l'équation :

$$\sqrt{x+1} = x - 5$$

Il s'agit pour commencer de remarquer qu'il est possible de l'écrire si $x \geqslant -1$. De plus, le sens direct donne :

$$\sqrt{x+1} = x-5 \Rightarrow x+1 = (x-5)^2 = x^2 - 10\,x + 25 \Rightarrow x^2 - 11\,x + 24 = 0$$

On en déduit, comme $\Delta = 121 - 96 = 25 > 0$:

$$\sqrt{x+1} = x-5 \Rightarrow [x = 3 \quad \text{ou} \quad x = 8].$$

Cependant, la réciproque est fausse ! Le réel 3 n'est pas solution de l'équation. On en déduit : $\boxed{\mathcal{S} = \{8\}}$.
Une autre façon de voir le raisonnement que l'on vient de faire est de parler : d'« **analyse-synthèse** ». On a commencé par supposer que l'objet recherché existe avec ses propriétés, puis on a raisonné par *conditions nécessaires* jusqu'à avoir assez réduit l'étude. On termine en vérifiant ce qui, parmi ce qu'on a trouvé pendant l'analyse a les bonnes propriétés (on parle de *conditions suffisantes*).

1.3 Rien n'oblige l'inconnue à être un réel dans ce type de raisonnement. Cherchons par exemple les fonctions réelles à valeurs réelles f qui vérifient pour tous réels x et y :

$$f(x\,y) = x\,f(x) + y\,f(y).$$

(a) *Analyse :* Si une telle fonction existe, alors nécessairement, en prenant $x = y = 0$, $f(0) = 0$. Puis, en prenant $y = 0$, $x\,f(x) = 0$ donc $f(x) = 0$ si $x \neq 0$ par le théorème du produit nul. Donc f est la fonction nulle.

(b) *Synthèse :* Il est suffisant que le fonction soit nulle pour qu'elle soit solution de l'équation.

Donc $\boxed{\mathcal{S} = \{0\}}$.

Il est important de bien savoir manier les négations, en particulier avec l'implication logique En effet :

$$\text{non}(P \Rightarrow Q) = (P \text{ et non}(Q)).$$

P	Q	non(Q)	P et non(Q)	non(P$\Longrightarrow$ Q)
V	V	F	F	F
V	F	V	V	V
F	V	F	F	F
F	F	V	F	F

Par exemple, pour montrer que l'affirmation :

« Si un réel x est plus grand que 5, alors il est plus grand que 7 »

est fausse, on remarque que le contre exemple $x = 6$ vérifie

« x est plus grand que 5 **et** [1] x est strictement inférieur à 7 ».

Le principe à retenir est le suivant :

Pour prouver qu'une affirmation générale est fausse, il suffit d'en trouver un contre-exemple.

Pour formuler plus précisément des propositions mathématiques, il est souvent utile d'utiliser des quantificateurs.

$\forall$: « pour tout », $\exists$: « il existe » $\exists!$: « il existe un unique» $\in$: « appartient à ».

Par le principe précédent, les quantificateurs se comportent très bien avec les négations. En effet :

$$\text{non}(\forall x \in E, P(x)) = \exists x \in E,\ \text{non}(P(x)) \quad \text{et donc} \quad \text{non}(\exists x \in E, P(x)) = \forall x \in E,\ \text{non}(P(x)).$$

Remarque(s) 2 : Dans une proposition logique, l'ordre des quantificateurs est primordial. Par exemple :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R},\ x = y$$

est vraie ; il suffit de prendre $x = y$ mais :

$$\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R},\ x = y$$

est clairement fausse : un contre exemple est donné par $y = x + 1$.

1. on écrira parfois « mais »

1.2 Rudiments de théorie des ensembles

On note souvent les ensembles avec des lettres majuscules : « soit E un ensemble », ou, lorsqu'ils sont particuliers, avoir leur lettre dédiée. Par exemple :

1. $\emptyset$ l'ensemble vide. Il s'agit de l'ensemble qui ne contient aucun élément.
2. $\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels,
3. $\mathbb{Z}$ celui des entiers relatifs,
4. $\mathbb{Q}$ celui des rationnels,
5. $\mathbb{R}$ celui des réels.

Un ensemble est souvent décrit par ses *éléments* ; si x est un élément d'un ensemble E, on écrira $x \in E$, si ce n'est pas le cas, $x \notin E$. Par exemple :

$$2 \in \mathbb{N}, \quad , -3 \in \mathbb{Z}, \quad \frac{1}{2} \in \mathbb{Q}, \quad \sqrt{2} \in \mathbb{R}, \quad \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}.$$

Si E est un ensemble fixé, on dit qu'un ensemble A est *inclus* ou *une partie* de E si tous les éléments de A sont aussi des éléments de E ; on écrit alors :

$$A \subset E \iff (x \in A \implies x \in E).$$

Par exemple :

$$\emptyset \subset \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

Remarque(s) 3 : 1. Deux ensembles A et B sont égaux si et seulement si ils ont les mêmes éléments. Autrement dit :

$$A = B \iff (x \in A \Leftrightarrow x \in B) \iff (x \in A \Rightarrow x \in B \text{ et } x \in B \Rightarrow x \in A) \iff (A \subset B \text{ et } B \subset A).$$

Pour cette raison, pour montrer que deux ensembles sont égaux, on procédera souvent par **double inclusion**.

Exemple(s) 2 :

2.1 Montrons que les ensembles suivants sont égaux :

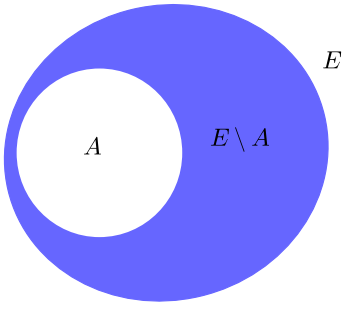
$$A = \{n + 5, \quad n \in \mathbb{N}\}, \quad B = \{m \in \mathbb{Z}, \quad m \geqslant 5\}.$$

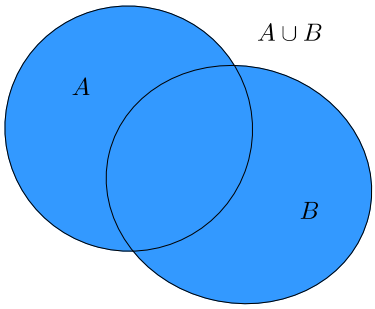
(a) $A \subset B$: Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors $n + 5 \in \mathbb{Z}$ et $n + 5 \geqslant 5$. Donc $n + 5 \in B$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc $A \subset B$.

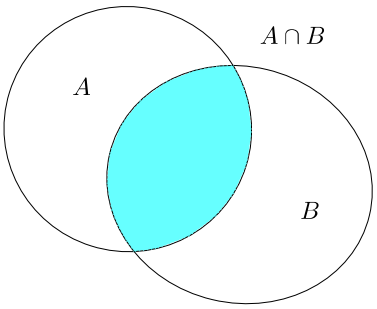
(b) $B \subset A$: Soit $m \in \mathbb{Z}$, $m \geqslant 5$. Alors $n = m - 5 \geqslant 0$ donc $n \in \mathbb{N}$. Mais alors $m = \underbrace{m - 5}_{=n \in \mathbb{N}} + 5 \in A$ donc $B \subset A$.

Pour A et B deux parties d'un ensemble E, on définit des opérations sur A et B par :

$$x \in E \setminus A \iff \text{non}(x \in A), \quad x \in A \cup B \iff (x \in A \text{ ou } x \in B), \quad x \in A \cap B \iff (x \in A \text{ et } x \in B).$$







On appelle ces ensembles :

1. $E \setminus A = \overline{A} = \complement_A^E$, le *complémentaire* de A dans E,
2. $A \cup B$, *l'union* de A et B,
3. $A \cap B$, *l'intersection* de A et B.

1.3 Premiers raisonnements

Terminons cette partie par quelques types de raisonnements couramment utilisés :

1. *Le raisonnement par implication directe :* c'est le plus simple à utiliser, pour prouver $P \Longrightarrow Q$ on suppose P vrai et on en déduit qu'alors Q aussi.

Exemple(s) 3 :

3.1 Montrons que, si x et y sont des réels et $x\,y = 0$ alors si $x \neq 0$ on a $y = 0$. En effet, dans ce cas

$$x\,y = 0 \quad \text{donc} \quad y = \underbrace{\frac{1}{x}}_{x\neq 0}\, x\,y = \frac{1}{x}\,0 = 0.$$

Notez qu'on retrouve ainsi le théorème dit du « produit nul » : si pour x et y deux réels, $x\,y = 0$ alors $x = 0$ ou (par ce qu'on vient de voir) $y = 0$.

3.2 Montrons que :

« Si l'entier naturel n est pair, alors n^2 aussi »

Est une proposition vraie. En effet, si n est pair, on peut écrire $n = 2\,k$ avec k un entier naturel et l'on en déduit que $n^2 = 2\,(2\,k^2)$ est pair.

2. *Le raisonnement par contraposée :* qui se base sur la constatation suivante :

P	Q	non(P)	non(Q)	non(Q)$\Longrightarrow$ non(P)	P$\Longrightarrow$ Q
V	V	F	F	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	V
F	F	V	V	V	V

Ou, autrement dit :

$$(P \Longrightarrow Q) \Longleftrightarrow (\text{non}(Q) \Longrightarrow \text{non}(P)).$$

La méthode consiste donc à supposer que Q est faux et à en déduire que P est faux.

Exemple(s) 4 :

4.1 Montrons que : si $x^3 = 7$ alors $x \leqslant 2$.
Par contraposée, si $x > 2$ alors $x^3 > 2^3 = 8$ donc $x^3 \neq 7$.

4.2 Essayons de montrer la réciproque de l'exemple précédent :

« Si le carré d'un entier naturel n est pair, alors n est pair. »

Pour ce faire, nous allons procéder par contraposée : on suppose n impair. On peut alors l'écrire $n = 2\,k + 1$, avec k un entier naturel. On en déduit alors :

$$n^2 = (2\,k+1)^2 = 4\,k^2 + 4\,k + 1 = 2\,(2\,k^2 + 2\,k) + 1$$

donc n^2 est impair.

3. *Le raisonnement par l'absurde :* qui part du principe qu'il est équivalent de dire que P est vraie et que non(P) est fausse.

Exemple(s) 5 :

5.1 Montrons que si x, y et z sont des réels **positifs** tels que

$$x + y + z = 0 \quad \text{alors} \quad x = y = z = 0.$$

Par l'absurde, si ce n'était pas le cas, alors l'un des trois au moins serait non nul. Quitte à les renommer, on peut supposer que c'est x, qui est alors, comme il est positif strictement positif. Mais alors :

$$0 = \underbrace{x}_{>0} + \underbrace{y + z}_{\geqslant 0} > 0$$

Ce qui est absurde ! Donc $x = y = z = 0$. Notez que ce raisonnement s'étend sans difficulté à un nombre quelconque de réels positifs.

5.2 Montrons que $\sqrt{2}$ est irrationnel. Pour ceci, on suppose par l'absurde que $\sqrt{2}$ est le quotient de deux entiers p et q : $\sqrt{2} = p/q$. Quitte à simplifier la fraction, on peut supposer qu'elle est irréductible. Après multiplication par q puis élévation au carré, on en déduit :

$$2\,q^2 = p^2.$$

Donc p^2 est pair, et l'on en déduit que p est pair. Écrivons-le $p = 2\,p'$ avec p' un entier naturel. On en déduit :

$$q^2 = 2\,(p')^2$$

donc q^2 est pair et l'on en déduit que q est pair. Comme p et q sont pairs, la fraction est donc réductible. Absurde ! Le réel $\sqrt{2}$ est donc irrationnel.

Chapitre 2

Études de fonctions

2.1 Résolutions d'inégalités

2.1.1 Méthodes élémentaires

Propriété(s) 2.1.1 : (Compatibilité avec les opérations) Soit x, y et z trois réels.
Supposons $x \leqslant y$. Alors :

1. (a) $x + z \leqslant y + z$,
   (b) $x - z \leqslant y - z$.
2. (a) $x\,z \leqslant y\,z$ si $\boxed{z \geqslant 0}$,
   (b) $x/z \leqslant y/z$ si $\boxed{z > 0}$.

Remarque(s) 4 : Multiplier ou diviser par un réel négatif (ou strictement négatif dans le deuxième cas) **change le sens des inégalités**. Pour éviter ce genre de difficultés, je vous recommande donc d'essayer autant que possible de **toujours travailler avec des réels positifs**.
Bien que moins utiles, on peut énoncer de telles propriétés pour les inégalités strictes, en faisant bien attention dans 2 à prendre $z > 0$ dans les deux cas.

Exemple(s) 6 :

6.1 Résolvons l'inégalité :

$$5\,x + 3 \geqslant 8\,x + 5 \iff -3\,x \geqslant 2 \iff x \leqslant -\frac{2}{3}.$$

L'ensemble des solutions est donc $]-\infty, -2/3]$.

6.2 On peut résoudre des inégalités en utilisant des **tableaux de signes**, autant pour les produits que les quotients. Dans ce cas, on cherche donc à factoriser l'expression autant que possible. Par exemple :

$$\frac{x^2 - 1}{x - 2} \geqslant 0 \iff \frac{(x-1)\,(x+1)}{x-2} \geqslant 0$$

admet pour solutions $[-1, 1]\cup]2, +\infty[$.

6.3 Résolvons l'inéquation :

$$25 - (10\,x + 3)^2 \geqslant 0 \iff (2 - 10\,x)\,(8 + 10\,x) \geqslant 0$$

les solutions sont donc : $[-4/5, 1/5]$.

Propriété(s) 2.1.2 : (Opérations sur les inégalités) Soit x, y z et t des réels.

1. Si $x \leqslant y$ et $z \leqslant t$ alors $x + z \leqslant y + t$.
2. Si $0 \leqslant x \leqslant y$ et $0 \leqslant z \leqslant t$ alors $x\,z \leqslant y\,t$.

Démonstration : Montrons le deuxième point. Comme z est positif et $x \leqslant y$ alors $x\,z \leqslant y\,z$. Comme y est positif et $z \leqslant t$ alors $y\,z \leqslant y\,t$. Donc $x\,z \leqslant y\,z \leqslant y\,t$.

■

Remarque(s) 5 :
1. Encore une fois, pour la deuxième inégalité, c'est une bonne idée d'essayer de travailler autant que possible avec des réels positifs.
2. Je n'ai volontairement pas énoncé de propriétés pour la soustraction ou la division. Nous reparlerons de la division plus tard. Concernant la soustraction : si $x \leqslant y$ et $z \leqslant t$ alors en multipliant la deuxième inégalité par -1 :
$$x \leqslant y \quad \text{et} \quad -t \leqslant -z \quad \text{donc} \quad x - \mathbf{t} \leqslant y - \mathbf{z}.$$
Attention, ce n'est certainement pas ce que vous attendiez !

2.1.2 Valeur absolue

La valeur absolue est définie par :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}}$$

Une bonne idée pour se représenter ce que signifie cette quantité est d'apprendre que $|x - y|$ est la distance entre les réels x et y. En particulier, $|x|$ représente la distance entre x et 0. De cette vision découle immédiatement $|-x| = |x|$, ou $|x| \geqslant 0$ par exemple.
Il est de plus utile de savoir écrire :

$$\boxed{|x| \leqslant M \iff -M \leqslant x \leqslant M.}$$

Exemple(s) 7 :

7.1 Supposons $x \in [-5, 2[$. Alors $-5 \leqslant x \leqslant 5$ donc $|x| \leqslant 5$.

7.2 Supposons que $|u_n - l| \leqslant \epsilon$. Alors

$$-\epsilon \leqslant u_n - l \leqslant \epsilon \iff l - \epsilon \leqslant u_n \leqslant l + \epsilon.$$

Propriété(s) 2.1.3 : Soit x et y deux réels. Alors :

1. $|x\,y| = |x|\,|y|$,
2. si $y \neq 0$: $|x/y| = |x|/|y|$,
3. $|x + y| \leqslant |x| + |y|$ (inégalité triangulaire)

Démonstration : Les deux premières formules se démontrent au cas par cas suivant les signes de x et y, la troisième en élevant au carré.

■

Remarque(s) 6 : 1. Comme $|x| = |-x|$ on déduit de l'inégalité triangulaire :

$$|x-y| \leqslant |x| + |y|$$

2. L'inégalité triangulaire n'est pas en général une égalité, comme le montre le cas $x = 1$, $y = -1$.
3. La propriété de compatibilité avec les produits en implique immédiatement une sur les puissances : $|x^n| = |x|^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. En particulier, pour $n = 2$ on en déduit la formule qui peut parfois être utile :$|x|^2 = x^2$.

Exemple(s) 8 :

8.1 Supposons que $|a|$, $|b|$ sont inférieurs à 1 et que $3 \leqslant |c| \leqslant 4$. Alors :

$$\left|\frac{a+b}{c}\right| = \frac{|a+b|}{|c|} \leqslant \frac{|a|+|b|}{|c|} \leqslant \frac{2}{3}.$$

8.2 Résolvons l'équation :

$$x\,|x-1| = 1 - |2\,x+1|$$

Pour ceci, on utilise le tableau de signes :

x	$-\infty$		$-1/2$		1		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$2\,x+1$		$-$	0	$+$		$+$	

qui nous permet de réduire l'équation initiale à la résolution de trois équations :

(a) Si $x \in]-\infty, -1/2]$:

$$x\,(1-x) = 1 - (-2\,x-1) \iff x^2 - x + 2 = 0$$

Le discriminant de cette équation du second degré étant strictement négatif, nous n'avons pas de solutions dans ce cas.

(b) Si $x \in]-1/2, 1]$:

$$x\,(1-x) = 1 - (2\,x+1) \iff x^2 - 3\,x = 0 \iff x\,(x-3) = 0$$

Les solutions sont donc 0 et 3 mais seule 0 appartient à l'intervalle $]-1/2, 1]$.

(c) Enfin, si $x \in]1, +\infty[$:

$$x\,(x-1) = 1 - (2\,x+1) \iff x^2 + x = 0 \iff x\,(x+1) = 0$$

et l'on trouve dans ce cas deux solutions : $x = 0$ et $x = -1$ mais aucune des deux n'est dans l'intervalle $]1, +\infty[$.

Finalement, les solutions de l'équation sont $\mathcal{S} = \{0\}$.

2.1.3 Utilisation de la monotonie de certaines fonctions

Définition 2.1.1 : *Soit f une fonction à valeurs réelles définie sur E. On dit que :*

1. f est croissante sur I si :

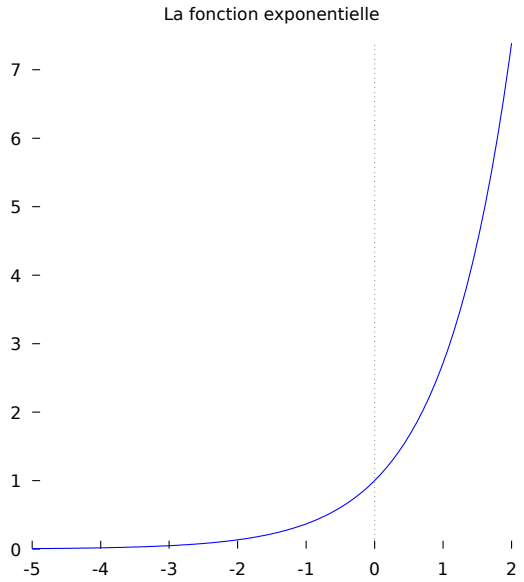
$$\forall (x,y) \in E^2, \quad x \leqslant y \Longrightarrow f(x) \leqslant f(y),$$

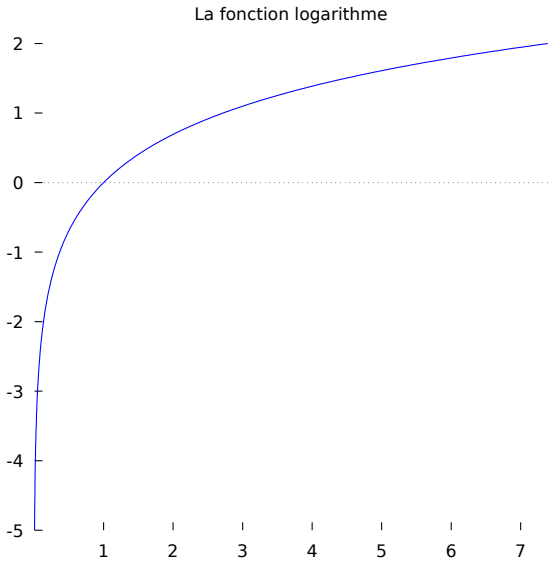
2. *f est strictement croissante sur I si :*

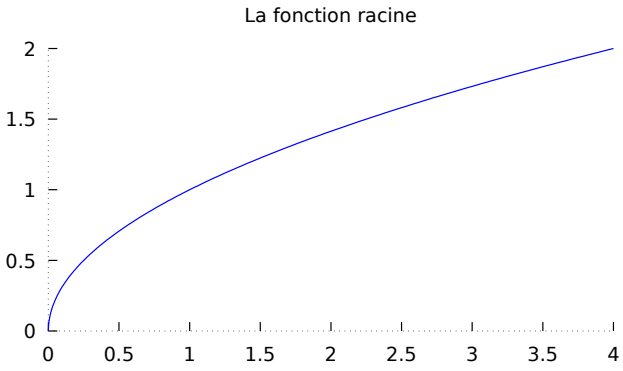
$$\forall (x,y) \in E^2, \quad x < y \Longrightarrow f(x) < f(y).$$

Remarque(s) 7 :
1. Bien entendu, toutes ces définitions peuvent aussi s'écrire pour parler de décroissance, en inversant les inégalités entre $f(x)$ et $f(y)$.
2. On dit qu'une fonction est **monotone** si elle est croissante ou décroissante et **strictement monotone** si elle est strictement croissante ou strictement décroissante.
3. Attention ! Une fonction peut avoir toujours une dérivée négative et ne pas être décroissante, comme le prouve $f(x) = 1/x$ sur $\mathbb{R}^*$. On verra plus tard que pour que ce résultat soit vrai, il est nécessaire de travailler sur un **intervalle**.

Il est bon, pour pouvoir utiliser ces fonctions dans la résolution d'inéquations de se souvenir du graphe des fonctions usuelles. Commençons par celles qui ne présentent pas de piège :







Comme ces trois fonctions sont strictement croissantes sur leurs intervalles de définition, on peut les appliquer dans les inégalités, mêmes strictes sans se poser la moindre question. Cependant :

1. Si $x \geqslant y \geqslant 0$ alors $x^2 \geqslant y^2$,
2. si $x \leqslant y \leqslant 0$ alors $x^2 \geqslant y^2$,
3. si x et y sont de signes opposés on ne peut rien dire sur x^2 et y^2.
4. Si $x \geqslant y > 0$ alors $1/x \leqslant 1/y$,
5. si $x \leqslant y < 0$ alors $1/x \geqslant 1/y$,
6. si x et y sont de signes opposés pensez au signe pour $1/x$ et $1/y$.

Exemple(s) 9 :

9.1 Résolvons l'inéquation :

$$\underbrace{\ln(2\,x+1) \leqslant \ln(x)+1 \iff 2\,x+1 \leqslant x\,e}_{\text{Comme l'exponentielle et le logarithme sont croissants}} \iff x\,(e-2) \geqslant 1 \iff x \geqslant \frac{1}{e-2}.$$

Les solutions sont donc $[1/(e-2), +\infty[$.

9.2 Résolvons l'inéquation :

$$\sqrt{2\,x-1} \leqslant \sqrt{x+1}+1$$

pour ceci, commençons par remarquer qu'elle n'est définie que sur $[1/2, +\infty[$ et que les quantités qui apparaissent sont positives. Elle équivaut donc, par croissance de la fonction carré sur $\mathbb{R}^+$ (et de la racine) à :

$$2\,x-1 \leqslant x+2+2\sqrt{x+1} \iff x-3 \leqslant 2\sqrt{x+1}.$$

cette inégalité est vraie pour des raisons de signes si $x \in [1/2, 3]$ de plus, si $x > 3$, par croissance de la fonction carré sur $\mathbb{R}^+*$, elle équivaut à :

$$(x-3)^2 \leqslant 4\,(x+1) \iff x^2 - 10\,x + 5 \leqslant 0$$

les solutions de l'équation du second degré qui apparaît sont $5+\sqrt{10}$ et $5-\sqrt{10} \leqslant 3$. Les solutions de l'équation sont donc $\mathcal{S} = [1/2, 5+\sqrt{10}]$.

2.2 Généralités sur les fonctions

Définition 2.2.2 : *Une fonction f est la donnée de deux ensembles E et F et, pour chaque $x \in E$ d'un unique élément $f(x) \in F$. On la note :*

$$f : \begin{cases} E \longrightarrow F \\ x \longmapsto f(x) \end{cases}$$

1. *On appelle E l'ensemble de définition de f,*
2. *on dit que f est à valeurs dans F,*
3. *et que $f(x)$ est l'image de x par f.*

On notera $\mathcal{F}(E,F)$ ou F^E l'ensemble des fonctions définies sur E à valeurs dans F.

Exemple(s) 10 :

10.1 La fonction **identité de** E est définie par :

$$\mathrm{Id}_E : \begin{cases} E \longrightarrow E \\ x \longmapsto x \end{cases}$$

10.2 Si $G \subset E$, alors la fonction **indicatrice de** G est définie par :

$$\mathbb{1}_G : \begin{cases} E \longrightarrow & \{0,1\} \\ x \longmapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } x \in G \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{cases}$$

10.3 Si $f :\ E \to F$ est une fonction et $G \subset E$ alors :

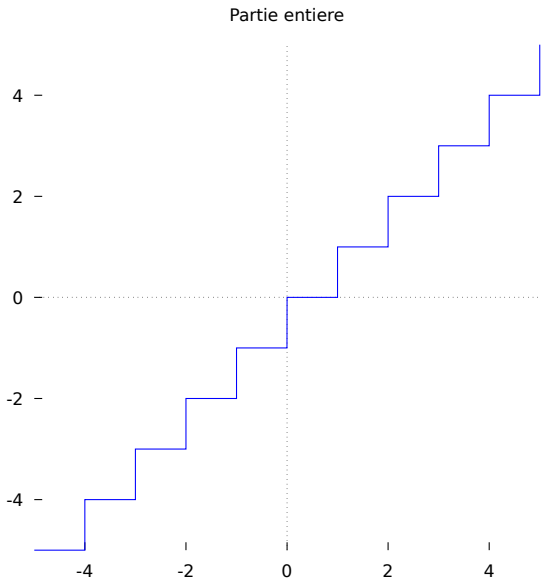
$$f_{|G} : \begin{cases} G \longrightarrow F \\ x \longmapsto f(x) \end{cases}$$

est une fonction, appelée **restriction de** f **à** G.

10.4 On définit la fonction partie entière pour tout réel x par :

$$\lfloor x \rfloor = k \in \mathbb{Z} \Longleftrightarrow k \leqslant x < k+1$$

Le graphe de cette fonction est (attention, l'ordinateur ne « voit » pas bien ce qui se passe à chaque entier) :



(a) La fonction partie entière est croissante sur $\mathbb{R}$,
(b) elle n'est pas strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Définition 2.2.3 : *Pour une fonction g réelle à valeurs réelle que l'on souhaite définir par une formule, il est parfois utile de chercher le domaine de définition* ***maximal****, c'est-à-dire :*

$$\boxed{\mathcal{D}_g = \{x \in \mathbb{R}, \quad g(x) \text{ existe}\}.}$$

Remarque(s) 8 : 1. Il est important de retenir les ensembles de définition maximaux des fonctions suivantes :

$f(x)$	$1/x$	$\sqrt{x}$	$\ln(x)$
$\mathcal{D}_f$	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}_+$	$\mathbb{R}_+^*$

2. Pour les autres fonctions, on peut se ramener à ces trois fonctions (pour le moment...) à l'aide d'un changement de variables. Il suffit alors de résoudre une inégalité pour conclure.

Exemple(s) 11 :

11.1 Si

$$g(x) = \frac{x+1}{x-1}$$

g est définie si et seulement si $X = x - 1 \neq 0$ donc $\mathcal{D}_g = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

11.2 La fonction f définie par la formule

$$f(x) = \sqrt{-x^2 + 5\,x - 6}$$

est définie si et seulement si $X = -x^2 + 5\,x - 6 \geqslant 0$. Elle admet donc pour domaine de définition maximal $\mathcal{D}_f = [2, 3]$.

2.2.1 Droites du plan, pentes

On peut définir une droites du plan de plusieurs façons différentes :

1. Par un *lieu géométrique* :
   (a) la droite passant par deux points distincts,
   (b) la droite passant par un point et dirigée par un vecteur non nul,
   (c) la droite parallèle à une autre passant par un point, ou perpendiculaire...
2. Par une équation *paramétrique*, qui est souvent la façon algébrique la plus simple de décrire une droite à partir d'un lieu géométrique ; par exemple la droite $\mathcal{D}$ passant par le point $A = (a, b)$ et dirigée par le vecteur $\vec{u} = (u, v) \neq (0, 0)$ a pour équation paramétrique :

$$M \in \mathcal{D} \iff \exists t \in \mathbb{R}, \quad M = A + t.\vec{u}.$$

   Ou encore :

$$M = (x, y) \in \mathcal{D} \iff \exists t \in \mathbb{R}, \quad \boxed{\begin{cases} x = a + t\,u \\ y = b + t\,v \end{cases}}.$$

3. Par une équation *cartésienne*, qui est souvent la formulation la plus simple à manier pour les calculs ; si l'on reprend le cas de l'exemple précédent, comme $u\,v \neq 0$, on a :

$$M = (x, y) \in \mathcal{D} \iff \exists t \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} x = a + t\,u \\ y = b + t\,v \end{cases} \iff \boxed{v\,(x - a) - u\,(y - b) = 0.}$$

Remarque(s) 9 : Il est important de savoir passer d'une écriture à l'autre dans ces définitions ; par exemple si l'énoncé vous donne l'équation cartésienne ($\beta \neq 0$) :

$$\alpha\,x + \beta\,y + \gamma = 0$$

il faut savoir immédiatement dire que cette droite est dirigée par le vecteur $\vec{u} = (-\beta, \alpha)$ et passe par le point $\left(0, \frac{-\gamma}{\beta}\right)$.

Définition 2.2.4 : *Soit $\mathcal{D}$ une droite du plan, que l'on suppose dirigée par un vecteur $\vec{u} = (u, v)$, $u \neq 0$. On appelle pente de la droite $\mathcal{D}$ la valeur v/u.*

Remarque(s) 10 : 1. Parfois, il est commode de quand même parler de pente d'une droite si $u = 0$. On dira dans ce cas que la droite a une pente infinie.

2. Il semble *à priori* que changer de choix de vecteur $\vec{u}$ pourrait changer la valeur de la pente de la droite $\mathcal{D}$. Ce n'est pas le cas ! Si $\vec{v}$ est un autre vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}$, alors $\vec{v} = \lambda.\vec{u}$ ($\lambda \neq 0$) donc $\vec{v} = (\lambda\, u, \lambda\, v)$ et
$$\frac{\lambda\, v}{\lambda\, u} = \frac{v}{u}$$
on dit que la pente est une propriété intrinsèque de la droite (et non du vecteur).
3. On peut réécrire l'équation cartésienne d'une droite passant par $M = (a, b)$ pour faire apparaître sa pente p :
$$\boxed{y = p\,(x - a) + b.}$$
4. Considérons la droite d'équation $y = a\,x + b$; la pente de cette droite est alors égale à a, si l'on définit alors sur $\mathbb{R}$ la fonction f par $f(x) = a\,x + b$, on remarque immédiatement que sur $\mathbb{R}$:
   (a) f est croissante si et seulement si $a \geqslant 0$,
   (b) f est décroissante si et seulement si $a \leqslant 0$,
   (c) f est strictement croissante si et seulement si $a > 0$
   (d) f est strictement décroissante si et seulement si $a < 0$

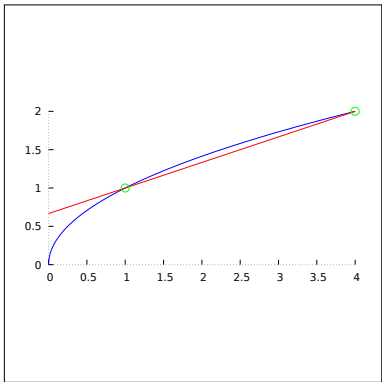
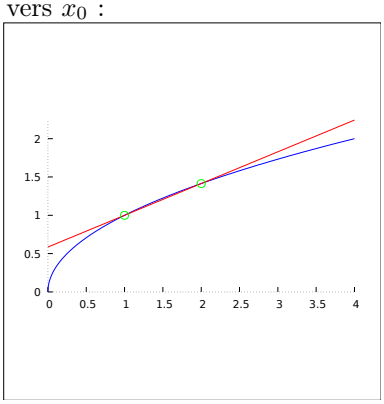
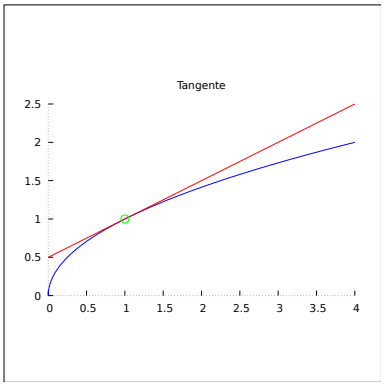
   une des idées de la tangente est de généraliser ce fait aux courbes en utilisant en chaque point une droite « meilleure approximation » de la courbe.

2.2.2 Le grand prêt : calculs pratiques de dérivées

Dans ce paragraphe, l'intervalle I est *ouvert*, c'est-à-dire $I =]a, b[$ où $(a, b) \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\})^2$.

Définition 2.2.5 : *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$. Soit $x_0 \in I$. On dit que f est dérivable en x_0 si :*
$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$
existe. On la note alors $f'(x_0)$. On dit que f est dérivable sur I si elle est dérivable en tout $x_0 \in I$.

Remarque(s) 11 : 1. D'où vient cette idée ? On peut faire un dessin pour essayer de l'expliquer. Si une droite passe par $(x, f(x))$ et $(x_0, f(x_0)$, alors elle a pour pente :
$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$
l'idée est d'ensuite faire tendre x vers x_0 :

2. Notez que par définition, si elle existe, l'équation de la tangente à la courbe $y = f(x)$ au point $(a, f(a))$ est donnée par :
$$\boxed{y = f'(a)\,(x-a) + f(a).}$$
3. Rappelez vous que toutes les fonctions ne sont pas dérivables, même avec cette définition. Par exemple, la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto |x|$ n'est pas dérivable en 0. Comme le taux d'accroissement admet cependant une limite à droite et à gauche en 0, on peut parler de tangente à droite et à gauche en 0.

Les fonctions suivantes sont dérivables sur leur ensemble de définition :

$f(x)$	$f'(x)$
$x^n,\ (n \in \mathbb{N})$	$n\,x^{n-1}$
$1/x$	$-1/x^2$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\ln(x)$	$1/x$
e^x	e^x

Mais attention, le fonctions suivantes ne sont dérivables que sur une partie de leur ensemble de définition :

$f(x)$	définie sur	dérivable en tous points de
$\sqrt{x}$	$\mathbb{R}_+$	$\mathbb{R}_+^*$
$\lvert x\rvert$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}^*$

Quand à leurs dérivées,
$$\boxed{(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad \text{et} \qquad |x|' = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}.}$$

• Justification de la formule pour $f(x) = 1/x$. soit $x \in \mathbb{R}^*$ et h tel que $x + h \in \mathbb{R}^*$:
$$\frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} = \frac{-1}{(x+h)\,x} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} -\frac{1}{x^2}.$$
Donc $f(x) = -1/x$ est dérivable en x et $f'(x) = -1/x^2$.

Propriété(s) 2.2.4 : Soit f et g deux fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$, dérivables sur I et $k \in \mathbb{R}$, alors

1. $f + g$ est dérivable sur I et $(f+g)' = f' + g'$.
2. $k.f$ est dérivable sur I et $(k.f)' = k.f'$.
3. $f\,g$ est dérivable sur I et $(f\,g)' = f' \times g + f \times g'$.
4. Si g ne s'annule pas sur I alors f/g est dérivable sur I et :
$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'\,g - g'\,f}{g^2}.$$

Définition 2.2.6 : *Soit $f \in \mathcal{F}(E,F)$ et $g \in \mathcal{F}(G,H)$ Alors si $\boxed{F \subset G}$, on peut définir la composition de f par g, notée $g \circ f \in \mathcal{F}(E,H)$ par :*
$$g \circ f(x) = g(f(x)).$$

Exemple(s) 12 :

12.1 Dans la définition, l'inclusion est indispensable ! Par exemple, si f est la fonction logarithme et $g \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ est définie par $g(x)=x$, alors $f\circ g$ n'existe pas !

12.2 Si :

$$f:\begin{cases}\mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+\\ x\longmapsto \sqrt{x}\end{cases} \quad \text{et} \quad g:\begin{cases}\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+\\ x\longmapsto x^2\end{cases}$$

Alors :

$$f\circ g:\begin{cases}\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+\\ x\longmapsto |x|\end{cases} \quad \text{et} \quad g\circ f:\begin{cases}\mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+\\ x\longmapsto x\end{cases}$$

En particulier, $f\circ g$ et $g\circ f$ sont deux fonctions très différentes.

Proposition 2.2.1 : *Soit I et J deux intervalles, f définie sur I, à valeurs dans J et g une fonction réelle définie sur J. Alors si f et g sont dérivables sur leurs intervalles de définition, $g\circ f$ aussi et :*

$$\boxed{(g\circ f)' = f'\times g'\circ f.}$$

Exemple(s) 13 :

13.1 On peut utiliser cette formule pour retrouver les formules bien connues :

$$(u^n)' = n\,u'\times u^{n-1} \qquad \left(\frac{1}{u^n}\right)' = \frac{-n\,u'}{u^{n+1}} \quad \text{et} \quad (\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}.$$

13.2 Un exercice de calcul de dérivée commence souvent par la détermination du domaine de dérivation. Par exemple, si l'on cherche à calculer la dérivée de :

$$f:\ x\mapsto \sqrt{\underbrace{x^2-1}_{=X}}$$

l'ensemble de définition maximal de cette fonction est $X\geqslant 0$ c'est-à-dire : $]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[$ mais son ensemble de dérivation est à priori seulement $X>0$ ou encore $]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$! Pour tout x de ce domaine, on a alors :

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}.$$

13.3 On considère la fonction définie par :

$$f(x) = \ln(|x|)$$

alors elle est définie et dérivable lorsque $X=|x|>0$ c'est-à-dire sur $\mathbb{R}^*$ et

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R}^*,\quad \ln(|x|)' = \frac{1}{x}.}$$

Et voici un dernier prêt, essentiel :

Propriété(s) 2.2.5 : Soit a et b deux réels $f: I=[a,b]\to\mathbb{R}$, dérivable sur I [1]. On a :

$$\begin{array}{lcl} f'\geqslant 0 \text{ sur }]a,b[& \Longleftrightarrow & f \text{ croissante sur } [a,b]\\ f'\leqslant 0 \text{ sur }]a,b[& \Longleftrightarrow & f \text{ décroissante sur} [a,b]\\ f'>0 \text{ sur }]a,b[& \Longrightarrow & f \text{ strictement croissante sur} [a,b]\\ f'<0 \text{ sur }]a,b[& \Longrightarrow & f \text{ strictement décroissante sur} [a,b] \end{array}$$

1. On verra plus tard que continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ suffit.

Remarque(s) 12 : Grâce aux deux premières affirmations, on en déduit :

$$f' = 0 \iff f \text{ constante}$$

2.3 Limites

2.3.1 Rappels de lycée

Commençons par quelques exemples à connaître :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x} &\xrightarrow[x\to\pm\infty]{} 0 \\
\frac{1}{x} &\xrightarrow[x\to 0^+]{} +\infty \\
\frac{1}{x} &\xrightarrow[x\to 0^-]{} -\infty \\
\forall n \in \mathbb{N}^*,\ x^n &\xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty \\
\ln(x) &\xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty \\
\ln(x) &\xrightarrow[x\to 0^+]{} -\infty \\
e^x &\xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty \\
e^x &\xrightarrow[x\to-\infty]{} 0
\end{aligned}$$

Exemple(s) 14 :

14.1 Notez qu'à priori, il est tout à fait possible qu'une fonction n'admette pas de limite en un point. Par exemple, ni la fonction sinus ni la fonction cosinus n'admet de limite en $+\infty$.

Lorsque l'on ne peut pas conclure en général, on notera FI pour forme indéterminée dans les tableaux suivants.

Propriété(s) 2.3.6 : Soit f et g définies sur I admettent des limites (resp. limites à gauche, limites à droite) en un point (éventuellement infini). Alors :

1. $f+g$ admet en a pour limite :

$g \setminus f$	$\lambda \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$
$\mu \in \mathbb{R}$	$\lambda+\mu$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	FI
$-\infty$	$-\infty$	FI	$-\infty$

2. $f \times g$ admet en a pour limite :

$g \setminus f$	$\lambda \in \mathbb{R}_+^*$	$\lambda \in \mathbb{R}_-^*$	$+\infty$	$-\infty$	0
$\mu \in \mathbb{R}_+^*$	$\lambda \times \mu$	$\lambda \times \mu$	$+\infty$	$-\infty$	0
$\mu \in \mathbb{R}_+^*$	$\lambda \times \mu$	$\lambda \times \mu$	$-\infty$	$+\infty$	0
$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	FI
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI
0	0	0	FI	FI	0

3. Si de plus, g ne s'annule pas sur un voisinage de a, f/g admet pour limite en a :

$g \setminus f$	$\lambda \in \mathbb{R}_+^*$	$\lambda \in \mathbb{R}_-^*$	$+\infty$	$-\infty$	0
$\mu \in \mathbb{R}_+^*$	$\frac{\lambda}{\mu}$	$\frac{\lambda}{\mu}$	$+\infty$	$-\infty$	0
$\mu \in \mathbb{R}_-^*$	$\frac{\lambda}{\mu}$	$\frac{\lambda}{\mu}$	$-\infty$	$+\infty$	0
$\pm\infty$	0	0	FI	FI	0
0^+	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	FI
0^-	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI

.

À ces propriétés, on peut en ajouter une dernière, pour le produit de composition :

Propriété(s) 2.3.7 : Si f admet une limite (resp. limite à gauche, limite à droite) $\lambda \in \overline{\mathbb{R}}$ en $a \in \overline{\mathbb{R}}$, si g est définie au voisinage de λ et admet une limite $\mu \in \overline{\mathbb{R}}$ en λ, alors $g \circ f(x)$ admet la limite (resp. limite à gauche, limite à droite) μ en a.

Exemple(s) 15 :

15.1 La fonction définie par $f(x) = x^2 - x$ vérifie :

$$f(x) = x^2 \times \left(1 - \frac{1}{x}\right).$$

Elle admet donc pour limite $+\infty$ en $+\infty$.

15.2 La fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$g(x) = \frac{1 + \frac{1}{x}}{\ln(x)}$$

admet pour limite 0 en $+\infty$.

15.3 La fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par

$$h(x) = \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

admet pour limite 0 en $+\infty$ et comme limite 1 en 0^+ et 0^-.

15.4 Le fonction définie sur $]1, +\infty[$ par :

$$k(x) = \ln\left(\frac{x}{1-x}\right)$$

admet pour limite $+\infty$ en 1^-.

2.3.2 Quelques méthodes pour lever une indétermination

Donnons ici quelques méthodes utiles pour lever une indétermination lorsqu'on recherche une limite. Commençons par quelques rappels de lycée :

1. La factorisation : il est parfois utile de factoriser les expressions avec lesquelles on travaille. Par exemple :

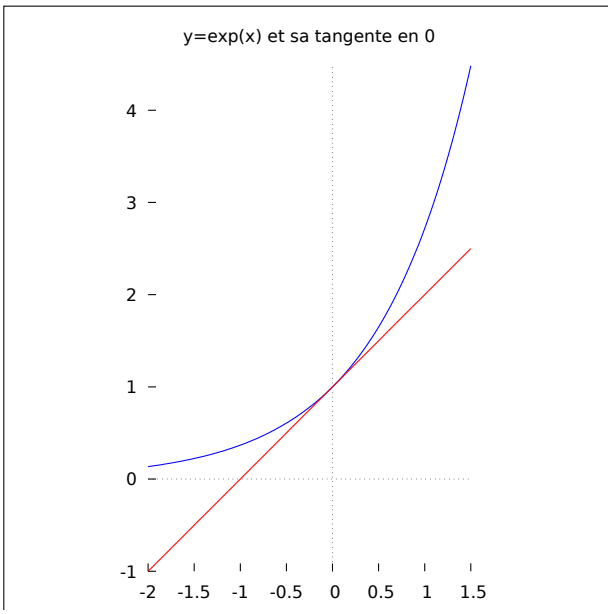
$$\frac{x^2 - 4}{x - 2} = x + 2$$

donc la fonction définie par cette expression admet pour limite 4 en 2.

2. La multiplication par une « quantité conjuguée », qui consiste essentiellement à se débarrasser de racines dans l'expression grâce à l'identité remarquable $(a-b) \times (a+b) = a^2 - b^2$. Par exemple, pour $x > 1$:

$$\sqrt{x^2 - 1} - x = \frac{x^2 - 1 - x^2}{\sqrt{x^2 - 1} + x} = \frac{-1}{\sqrt{x^2 - 1} + x} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

3. On peut également utiliser les « croissances comparées » : tout commence par la remarque géométrique suivante : le graphe de la fonction exponentielle est « au-dessus » de sa tangente en 0 :



En termes quantifiés :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x \geqslant 1+x.}$$

On en déduit que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \frac{e^x}{x^n} = e^{x/2} \times \left(\frac{e^{x/(2\,n)}}{x}\right)^n \geqslant \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2\,n}\right)^n \times e^{x/2}$$

Donc, comme le côté droit de l'inégalité tend vers $+\infty$:

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty.}$$

De cette limite, on en déduit les théorèmes de **croissances comparées** :

Propriété(s) 2.3.8 : Pour tous réels strictement positifs a et b, on a :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{a\,x}}{x^b} = +\infty \quad (1), \qquad \lim_{x\to-\infty} |x|^b\,\mathrm{e}^{a\,x} = 0 \quad (2),$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln(x))^b}{x^a} = 0 \quad (3), \qquad \lim_{x\to0^+} x^a\,|\ln(x)|^b = 0 \quad (4).$$

Démonstration : IL s'agit essentiellement à chaque fois d'effectuer le bon changement de variables. On pose : $y = a \times x$ dans le premier cas, $y = -a \times x$ dans le deuxième, $y = a \times \ln(x)$ dans le troisième et $y = -a \times \ln(x)$ dans le dernier. Développons le premier cas. Il s'agit après changement de variables de déterminer la limite lorsque y tend vers $+\infty$ de

$$a^b \times \frac{e^y}{y^b} \geqslant a^b \times \frac{e^y}{y^n}$$

où $y \geqslant 1$ et n est un entier supérieur à b. Il reste à utiliser ce qu'on vient de prouver pour conclure.

■

Exemple(s) 16 :

16.1 On a :

$$\lim_{x\to0^+} \frac{\ln(x)^2}{e^x} = +\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)^2}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)^2}{x}\,x\,e^{-x} = 0$$

16.2 On a :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}}{e^x-1} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x}\, e^{-x}\, \frac{1}{1-e^{-x}} = 0$$

16.3 On a :

$$\frac{x^2+x+\ln(x)}{3\,\ln(x)} = \frac{1}{3}\left(1+\frac{x^2}{\ln(x)}+\frac{x}{\ln(x)}\right)$$

Donc cette quantité admet pour limite $\frac{1}{3}$ en 0^+ et $+\infty$ en $+\infty$.

4. Enfin, on peut parfois utiliser des équivalents, dont l'idée est de comparer une fonction en un point à une fonction plus simple :

Définition 2.3.7 : *Soit f et g deux fonctions définies sur I et a un point de I ou l'une de ses bornes. On suppose que g ne s'annule pas sur $I\setminus\{a\}$. On dit que f et g sont équivalentes en a et on écrit $f\sim_a g$ si :*

$$\frac{f(x)}{g(x)} \underset{x\to a}{\longrightarrow} 1.$$

Remarque(s) 13 : Par définition, si deux fonctions sont équivalentes, l'étude d'une éventuelle limite de l'une est équivalente à celle de l'autre.

Exemple(s) 17 :

17.1 Vous faites déjà des équivalents sans vous en rendre compte ! Par exemple :

$$x^3+x^2+x\sim_{+\infty} x^3 \quad \text{et} \quad x^3+x^2+x\sim_0 x$$

Plus généralement, l'essentiel des méthodes de factorisation peuvent se « traduire » en équivalents.

Propriété(s) 2.3.9 : On a les équivalents suivants :

(a) $\cos(x)\sim_0 1$,
(b) $\sin(x)\sim_0 x$,
(c) $e^x-1\sim_0 x$,
(d) $\ln(1+x)\sim_0 x$,
(e) $(1+x)^\alpha-1\sim \alpha\, x$.

Démonstration : Tous ces équivalents (sauf le premier, qui est évident) s'obtiennent en utilisant le taux d'accroissement. Par exemple, comme la fonction sin est dérivable en 0 :

$$\frac{\sin(x)}{x} = \frac{\sin(x)-\sin(0)}{x-0} \underset{x\to0}{\longrightarrow} \sin'(0) = \cos(0) = 1.$$

■

Remarque(s) 14 : 1. La relation d'équivalence est compatible avec le **produit** et le **quotient**.

Démonstration : Montrons la compatibilité avec le produit. Si $f\sim_a g$ et $h\sim_a k$ Alors :

$$\frac{f(x)\,h(x)}{g(x)\,k(x)} = \frac{f(x)}{g(x)}\,\frac{h(x)}{k(x)} \underset{x\to a}{\longrightarrow} 1\,1 = 1$$

donc $f\,h\sim_a g\,k$.

■

On peut également penser à la composition des limites (en passant par un X)...

2. Par contre, elle n'est en général compatible avec aucune autre opération (dont **somme, différence, composition**). Par exemple :

$$x+1 \sim_{+\infty} x \quad \text{et} \quad -x \sim_{+\infty} -x \quad \text{mais} \quad 1 \not\sim_{+\infty} 0.$$

Exemple(s) 18 :

18.1 On a :

$$\frac{\sin(x)\,(\sqrt{1+x}-1)}{\sin^2(x)} \sim_0 \frac{x\,x/2}{x^2} = \frac{1}{2} \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{1}{2}.$$

18.2 Dans l'exemple suivant, pensez « $X = -2\,x$ » au numérateur et « $X = 3\,x$ » au dénominateur en vérifiant bien que dans les deux cas, X tend vers 0 :

$$\frac{\ln(1-2\,x)}{\sin(3\,x)} \sim_0 \frac{-2\,x}{3\,x} = -\frac{2}{3} \xrightarrow[x\to 0]{} -\frac{2}{3}.$$

2.4 Études de fonctions

2.4.1 Réduction du domaine

Définition 2.4.8 : *Soit f une fonction à valeurs réelles définie sur I. On dit que :*

1. *f est $p>0$-périodique si : $\forall x \in I, x+p \in I \quad f(x+p) = f(x)$,*
2. *si I est symétrique par rapport à 0 (c'est-à-dire si pour tout x de I, $-x \in I$) :*
   (a) *f est impaire si : $\forall x \in I, \quad f(-x) = -f(x)$*
   (b) *f est paire si : $\forall x \in I, \quad f(-x) = f(x)$.*

Exemple(s) 19 :

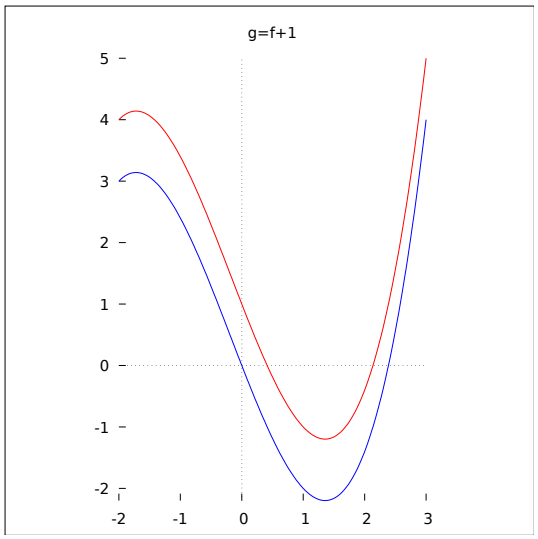
19.1 La fonction sinus est impaire, $2\,\pi$-périodique

19.2 la fonction cosinus est paire, $2\,\pi$-périodique.

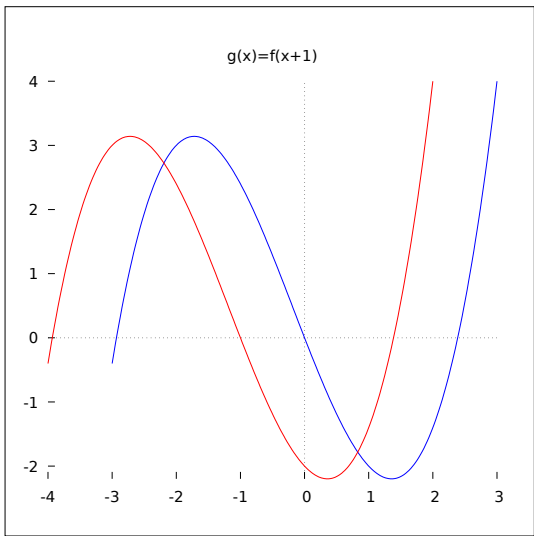
19.3 la fonction tangente est impaire, π-périodique

Faisons maintenant quelques remarques géométriques :

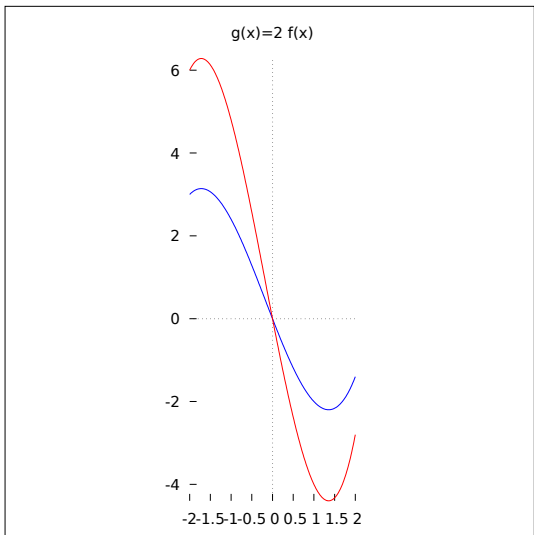
Remarque(s) 15 : 1. Si $a \in \mathbb{R}$, le graphe de la fonction $g : x \mapsto f(x) + a$ est le translaté du graphe de la fonction de f de vecteur $(0, a)$:



2. Si $a \in \mathbb{R}$, le graphe de la fonction $g : x \mapsto f(x+a)$ est le translaté du graphe de la fonction de f de vecteur $(-a, 0)$:



3. Si $a \in \mathbb{R}$, le graphe de la fonction $g : x \mapsto a\, f(x)$ est l'affinité du graphe de f par rapport à l'axe O_x de rapport a (c'est-à-dire, la distance à l'axe O_x de tout point du graphe est multiplié par a)



4. Si $a \in \mathbb{R}$, le graphe de la fonction f est symétrique par rapport à la droite $x = a$ si c'est le cas de son

ensemble de définition et pour tout h pour lequel ceci a du sens :

$$f(a+h) = f(a-h)$$

De ces remarques, on en déduit la méthode suivante pour réduire le domaine d'étude d'une fonction :

1. Si une fonction est p-périodique, il suffit de l'étudier sur une période (c'est-à-dire sur une intervalle de longueur p) pour en déduire son graphe entier par translations (remarque 2),
2. si une fonction est impaire ou paire, il suffit de l'étudier sur le partie positive de son ensemble de définition, pour en déduire son graphe complet par symétrie orthogonale par rapport à O_y (dans le cas pair, par la remarque 3) ou centrale par rapport à O (dans le cas impair, par les remarques 3 et 4).

2.4.2 Recherche d'asymptotes

Définition 2.4.9 : *Soit f une fonction à valeurs réelle. Soit x_0, a et b trois réels. On dit que :*

1. *f admet une asymptote horizontale d'équation $y = a$ si :*

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = a$$

2. *f admet une asymptote verticale d'équation $x = x_0$ en x_0 si :*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$$

Remarque(s) 16 : Dans le cas où une fonction $f(x)$ admet pour limite $\pm\infty$ en $\pm\infty$, on peut chercher un équivalent simple $e(x)$ en ce point puis étudier la quantité $f(x) - e(x)$ pour avoir une idée de son graphe en $\pm\infty$.

2.5 Mise en œuvre

2.5.1 Un exemple de synthèse

La fonction définie par l'expression

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1}$$

admet pour domaine de définition et de dérivabilité l'ensemble $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. Elle est impaire, il suffit donc de l'étudier sur $[0, 1[\cup]1, +\infty[$. Calculons sa dérivée :

$$f'(x) = \frac{x^2\left(x^2 - 3\right)}{(x-1)^2(x+1)^2}$$

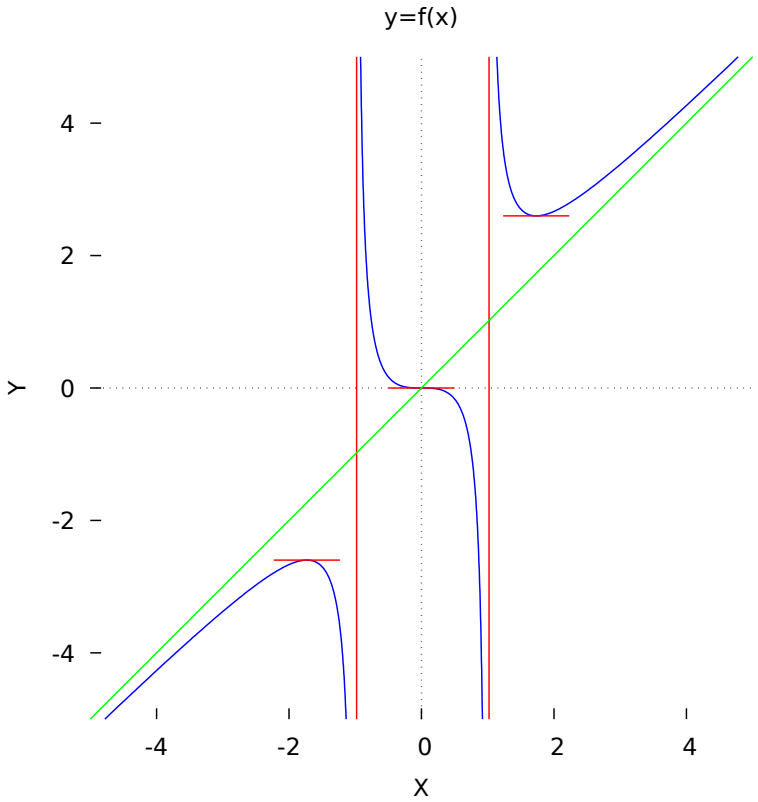
La dérivée est du signe de $x^2 - 3$, donc positive sur son ensemble d'étude pour x supérieur à $\sqrt{3}$ et négative sinon. Faisons le tableau de variations :

x	0		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

En 0 et en $\sqrt{3}$ la dérivée s'annule, en 1, on a une asymptote verticale à droite et à gauche. Reste à étudier son comportement en $+\infty$. On a :

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2-1} \sim_{+\infty} x \quad \text{et} \quad f(x) - x = \frac{x}{x^2-1}$$

comme cette quantité est positive et tend vers 0, la courbe de f se situe au-dessus de la droite $y = x$ mais s'approche de celle-ci lorsque x tend vers $+\infty$.

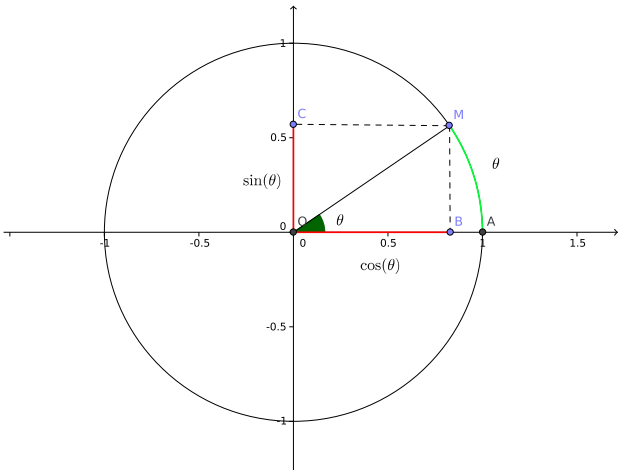


2.5.2 Fonctions trigonométriques

Les valeurs particulières suivantes des fonctions cos et sin sont à connaître :

x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\sin(x)$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
$\cos(x)$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0

Il est de plus toujours utile de savoir utiliser le **cercle trigonométrique** pour déterminer certaines propriétés des fonctions cos et sin :



Commençons par remarquer que, par le théorème de Pythagore,

$$\boxed{\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1.}$$

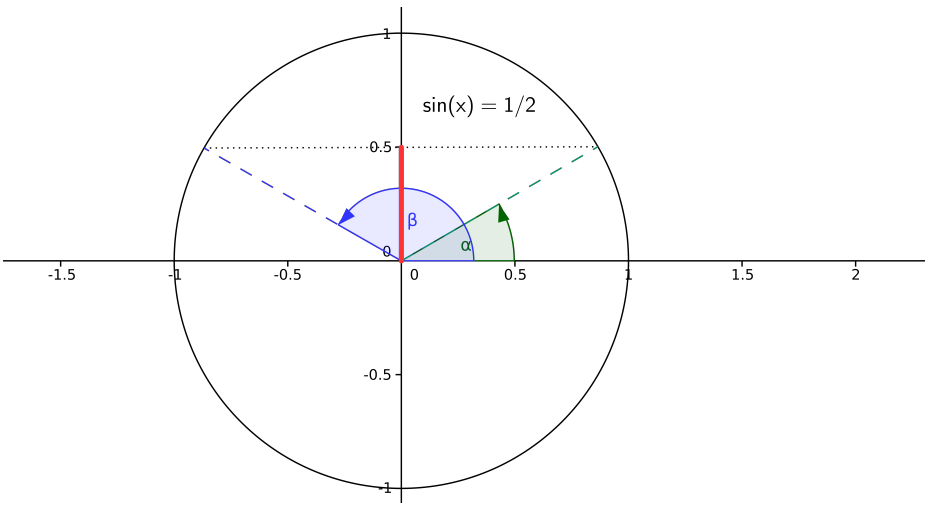
Grâce à un simple dessin, on trouve :

1. $\cos(\theta + 2\,\pi) = \cos(\theta)$
2. $\sin(\theta + 2\,\pi) = \sin(\theta)$
3. $\sin(-\theta) = -\sin(\theta)$
4. $\cos(-\theta) = \cos(\theta)$
5. $\sin(\pi + \theta) = -\sin(\theta)$
6. $\cos(\pi + \theta) = -\cos(\theta)$

Mais aussi :

1. $\cos(\pi - \theta) = -\cos(\theta)$
2. $\sin(\pi - \theta) = \sin(\theta)$
3. $\sin(\pi/2 + \theta) = \cos(\theta)$
4. $\cos(\pi/2 + \theta) = -\sin(\theta)$
5. $\sin(\pi/2 - \theta) = \cos(\theta)$
6. $\cos(\pi/2 - \theta) = \sin(\theta)$

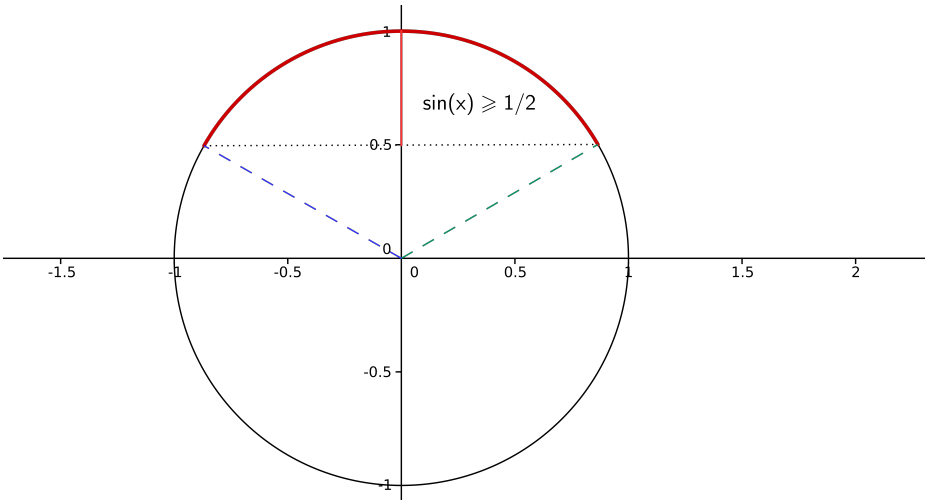
• L'utilisation d'un cercle trigonométrique permet de résoudre **graphiquement** certaines équations trigonométriques. Par exemple, comme le montre le dessin :



1. les solutions de $\sin(x) = \frac{1}{2}$ sur $]-\pi, \pi]$ sont $\pi/6$ et $5\,\pi/6$,
2. les solutions de cette équation sur $\mathbb{R}$ sont donc :

$$\mathcal{S} = \{\pi/6 + 2\,k\,\pi, \quad k \in \mathbb{R}\} \cup \{5\,\pi/6 + 2\,k\,\pi, \quad k \in \mathbb{R}\}.$$

• On peut également résoudre graphiquement des inégalités trigonométriques. Par exemple, comme le montre le dessin suivant :



1. l'inégalité $\sin(x) \geqslant 1/2$ admet sur $]-\pi, \pi]$ les solutions $[\pi/6, 5\,\pi/6]$
2. ses solutions sur $\mathbb{R}$ sont donc :
$$\mathcal{S} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} [\pi/6 + 2\,k\,\pi, 5\,\pi/6 + 2\,k\,\pi].$$

Proposition 2.5.2 : *(Formules de somme) Pour tous réels a et b, on a :*

1. $\cos(a+b) = \cos(a)\,\cos(b) - \sin(a)\,\sin(b)$,
2. $\sin(a+b) = \sin(a)\,\cos(b) + \cos(a)\,\sin(b)$.

Démonstration : Notons $M_\theta = (\cos(\theta), \sin(\theta))$ et comme d'habitude $O = (0,0)$. Alors
$$\overrightarrow{OM_{a+b}} = \cos(b).\overrightarrow{OM_a} + \sin(b).\overrightarrow{OM_{a+\frac{\pi}{2}}}.$$
Il suffit alors d'utiliser le point 6 de la propriété précédente et de prendre des coordonnées :
$$(\cos(a+b), \sin(a+b)) = \cos(b).(\cos(a), \sin(a)) + \sin(b).(-\sin(a), \cos(a)).$$
pour conclure en identifiant les coordonnées.

■

Remarque(s) 17 : Des formules de sommes, on doit savoir retrouver (très) rapidement les formules suivantes :

1. En prenant $\boxed{a = b}$ (formules de duplication) :
$$\boxed{\cos(2\,a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = 2\,\cos^2(a) - 1 = 1 - 2\,\sin^2(a) \quad \text{et} \quad \sin(2\,a) = 2\,\cos(a)\,\sin(a).}$$
2. En prenant $\boxed{b = -b}$ (formules de différence) :
$$\cos(a-b) = \cos(a)\,\cos(b) + \sin(a)\,\sin(b) \quad \sin(a-b) = \sin(a)\,\cos(b) - \sin(b)\,\cos(a).$$

Exemple(s) 20 :

20.1 Calculons $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$. On remarque que :
$$\frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

donc :

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

on en déduit :

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}(1+\sqrt{3}).$$

20.2 Calculons $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$. On a :

$$\cos(2\,a) = 2\,\cos^2(a) - 1$$

donc en appliquant en $a = \frac{\pi}{8}$:

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2\,\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) - 1$$

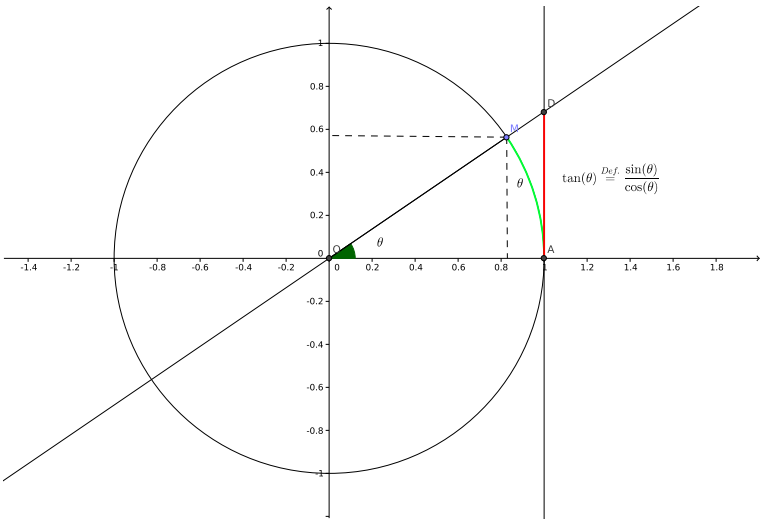
On en déduit, après avoir remarqué que comme $\frac{\pi}{8} \in [0,\pi]$, $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) \geqslant 0$,

$$\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{\sqrt{2}+2}}{2}.$$

Contrairement aux fonctions sinus et cosinus, la fonction tangente, définie par :

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}.$$

Et qui se « voit » géométriquement grâce au dessin :



n'est pas définie pour tout réel θ, ce qui peut se voir géométriquement, ou simplement en cherchant les points d'annulation de la fonction cosinus. L'ensemble de définition de la fonction tangente est :

$$\boxed{\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\,\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}.}$$

Rappelons que la définition nous donne immédiatement les valeurs particulières suivantes :

$$\boxed{\tan(0) = 0,\ \tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}},\ \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1,\ \tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}.}$$

De plus, la fonction tangente est :

1. **Impaire** car $\mathcal{D}$ est symétrique par rapport à 0 et pour tout $x \in \mathcal{D}$:

$$\tan(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = -\frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \tan(x)$$

2. $\boxed{\pi}$**-périodique** car pour tout $x \in \mathcal{D}$, $x + \pi \in \mathcal{D}$ et :

$$\tan(x+\pi) = \frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} = \frac{-\sin(x)}{-\cos(x)} = \tan(x).$$

Propriété(s) 2.5.10 : Soit $(a, b) \in \mathcal{D}^2$. Si $a + b \in \mathcal{D}$, alors

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \, \tan b}.$$

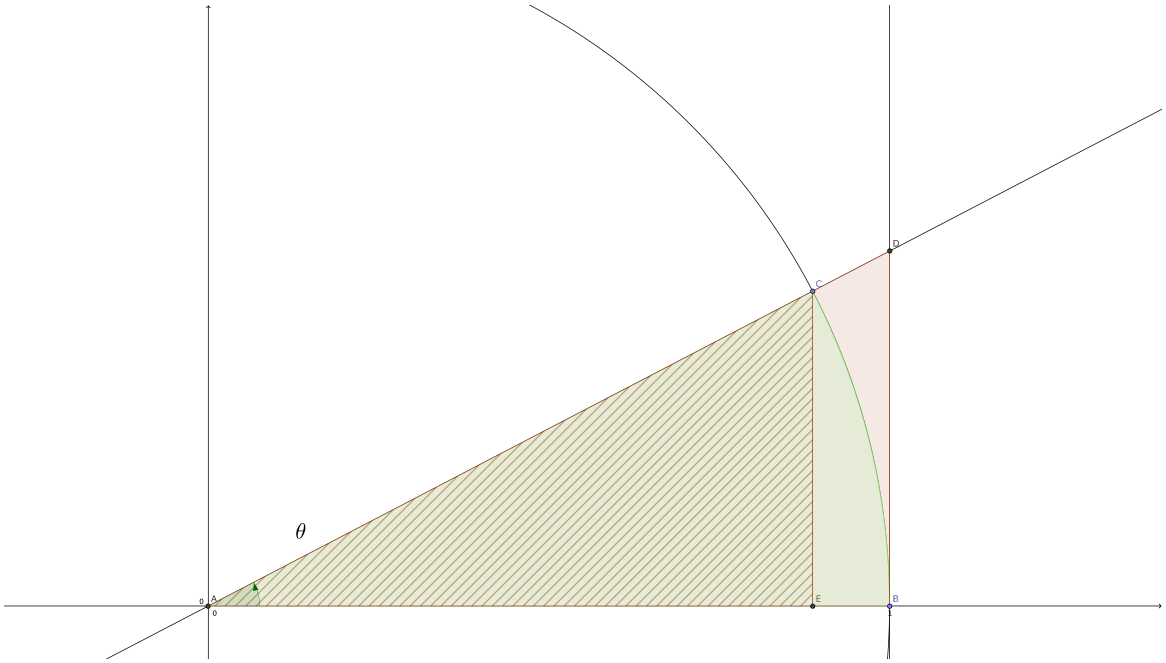
Démonstration : Il s'agit simplement de revenir à la définition et d'utiliser les formules de somme :

$$\tan(a+b) = \frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)} = \frac{\sin(a)\,\cos(b) + \sin(b)\,\cos(a)}{\cos(a)\,\cos(b) - \sin(a)\,\sin(b)} = \frac{\frac{\sin(a)}{\cos(a)} + \frac{\sin(b)}{\cos(b)}}{1 - \frac{\sin(a)\,\sin(b)}{\cos(a)\,\cos(b)}} = \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\,\tan(b)}.$$

■

• Étude de la fonction sinus.

1. Commençons par une inégalité géométrique :



l'aire du triangle hachuré, qui vaut $\sin(\theta)\,\cos(\theta)/2$, est inférieure à celle du secteur circulaire, qui vaut $\theta/2$, qui est inférieure à celle du triangle marron, qui vaut $\tan(\theta)/2$. Donc en multipliant par 2 les inégalités trouvées :

$$\forall \theta \in [0, \pi/2[, \quad \sin(\theta)\,\cos(\theta) \leqslant \theta \leqslant \tan(\theta)$$

2. On en déduit en la dérivée de la fonction sinus en 0. Pour h non nul appartenant à $[0, \pi/2[$, on a (en prenant bien garde de traiter séparément le cas h positif et h négatif) :

$$\cos(h) \leqslant \frac{\sin(h+0) - \sin(0)}{h - 0} = \frac{\sin(h)}{h} \leqslant \frac{1}{\cos(h)}$$

Cette inégalité reste vraie pour tout h non nul de $]-\pi/2, \pi/2[$ par parité et donc par le théorème des gendarmes,

$$\lim_{h \to 0} \frac{\sin(h)}{h} = 1.$$

La fonction sin est donc dérivable en 0 et $\sin'(0) = 1$.

3. On en déduit le cas des autres points. Si $x \in \mathbb{R}$ est quelconque :

$$\frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h} = \frac{\sin(x+h/2+h/2)-\sin(x+h/2-h/2)}{h} = \frac{\sin(h/2)}{h/2}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)$$

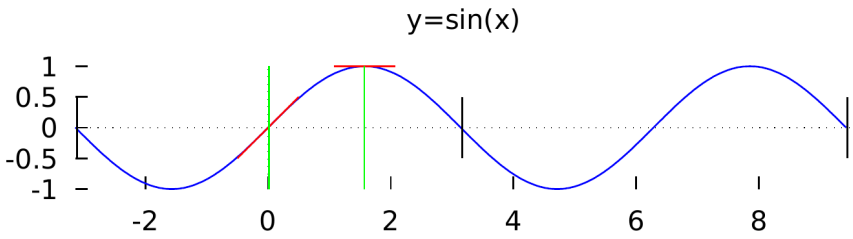
donc par ce qu'on vient de voir, sin est dérivable en x et $\sin'(x) = \cos(x)$.

4. **Réduction du domaine :** Comme sin est impaire, $2\,\pi$-périodique, il suffit de l'étudier sur $[0, \pi]$. De plus :

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$$

le graphe de la fonction est symétrique par rapport à $x = \pi/2$. Il suffit donc de l'étudier sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

5. Par le calcul de dérivée que l'on vient de faire et la réduction du domaine, on en déduit le graphe :



• Étude de la fonction cosinus. Tout se déduit de la fonction sinus à l'aide de la formule :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$$

en particulier, cos est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $-\sin$ par composition et la graphe de la fonction cosinus s'obtient par translation de vecteur $(-\pi/2, 0)$ de celui de la fonction sinus.
• Étude de la fonction tangente :

1. Par les théorèmes généraux, la fonction tangente est dérivable sur son ensemble de définition et :

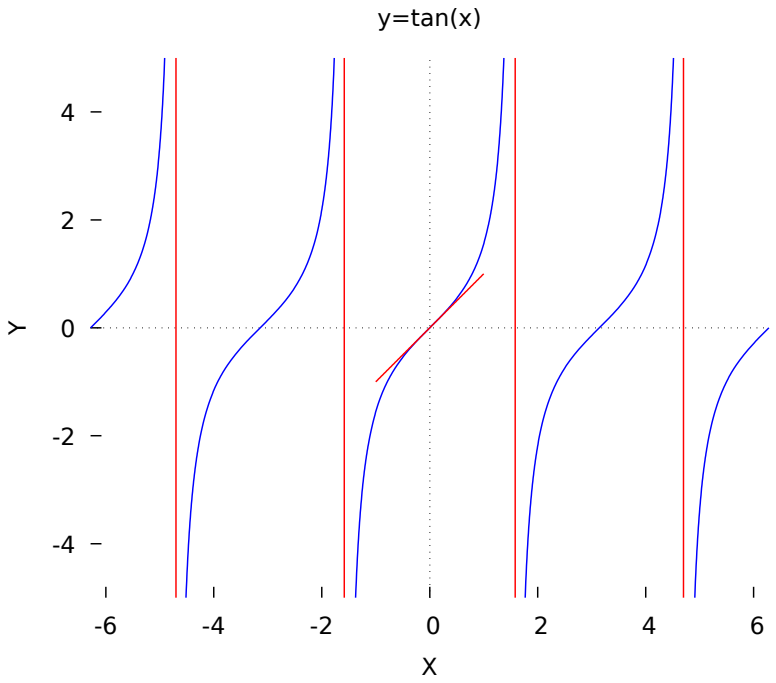
$$\boxed{\forall x \in \mathcal{D}, \quad \tan'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1+\tan^2(x).}$$

2. **Réduction du domaine :** comme tan est impaire, π-périodique, il suffit de l'étudier que $[0, \pi/2[$.

3. **Graphe :** par ce qu'on vient de voir :

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[, \quad \tan'(x) = 1+\tan^2(x) > 0$$

on étudie les points extrémaux : en 0, la courbe admet pour tangente $y = x$ et en $\frac{\pi}{2}^-$, la fonction admet pour limite $+\infty$ donc elle y a une tangente verticale. On en déduit le graphe :



2.5.3 Fonctions puissance

Rappelons que, si α est un réel et x un réel strictement positif, on a posé :

$$x^\alpha = \exp(\alpha \ln(x))$$

Mais nous connaissons d'autres façons de définir une puissance, par exemple, si n est un entier naturel non nul :

$$x^n = x \times x \times \cdots \times x \quad (n \text{ fois}).$$

Bien entendu, ces deux formules coïncident si $x > 0$. La différence essentielle entre elles est l'ensemble de définition, dans le premier cas, le formule n'a de sens que si $x > 0$ dans le deuxième, toujours. Pour ce qui concerne les entiers naturels (et aussi relatifs), la définition par multiplication (ou division) est donc bien plus générale. Que se passe-t-il en 0^+ si $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$? Un rapide calcul de limites donne :

$$\lim_{x \to 0^+} x^\alpha = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha > 0 \\ +\infty & \text{si } \alpha < 0. \end{cases}$$

Pour cette raison, on étend la définition de ces fonctions puissances en 0 en posant, si $\alpha > 0$, $0^\alpha = 0$. Résumons ; la fonction $x \mapsto x^\alpha$ est définie :

1. sur $\mathbb{R}$ si $\alpha \in \mathbb{N}$
2. sur $\mathbb{R}^*$ si $\alpha \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$
3. sur $\mathbb{R}_+^*$ et étendue en 0 si $\alpha \in \mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{Z}$
4. sur $\mathbb{R}_+^*$ si $\alpha \in \mathbb{R}_- \setminus \mathbb{Z}$

Si l'on s'intéresse à leur domaine de dérivabilité, les théorèmes généraux nous donnent que ces fonctions sont dérivables sur leur ensemble de définition, sauf éventuellement dans la cas où $\alpha \in \mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{N}$, pour lequel le point $x = 0$ reste à étudier. Écrivons le taux d'accroissement pour $x > 0$:

$$\frac{x^\alpha - 0}{x - 0} = x^{\alpha - 1} \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha < 1 \\ +\infty & \text{si } \alpha > 1 \end{cases}$$

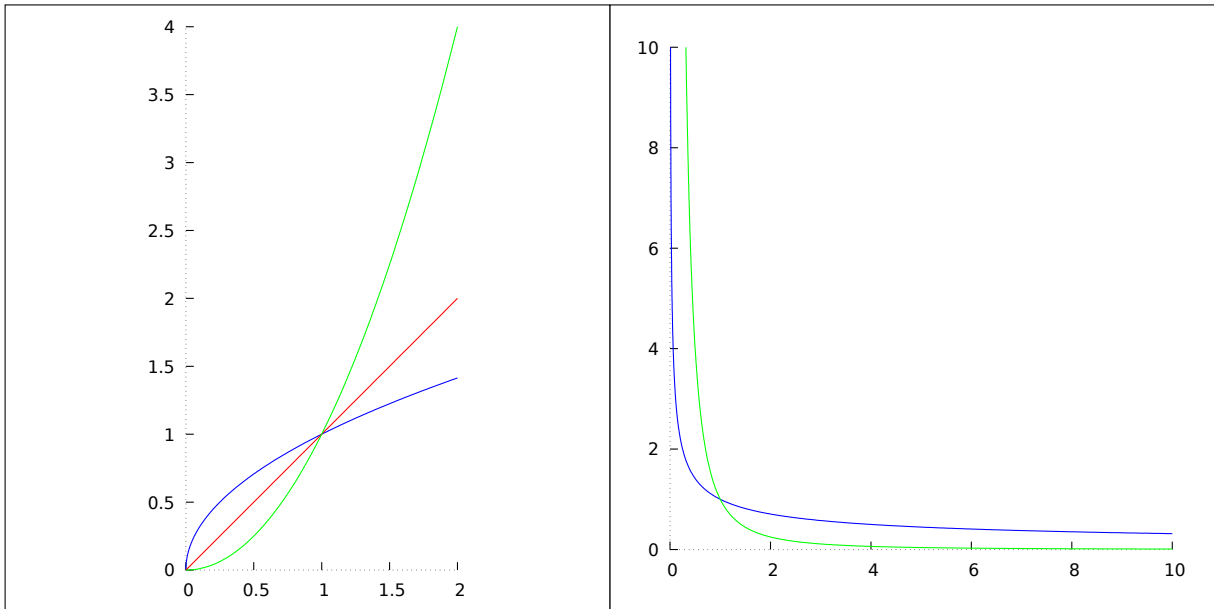
Récapitulons. Les fonctions puissances sont donc dérivables sur leur domaine de définition, sauf si $\alpha \in \mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{N}$ et $\boxed{\alpha < 1}$ et alors $x \mapsto x^\alpha$

$$\boxed{\text{n'est dérivable que sur } \mathbb{R}_+^*.}$$

Terminons par une étude de fonctions. Pour $x > 0$, la fonction $x \mapsto x^\alpha$ admet pour dérivée :

$$\alpha \times x^{\alpha-1}$$

on en déduit (dans le cas $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$) les formes de graphes suivantes (si $\alpha > 0$ puis $\alpha < 0$)



2.5.4 Cosinus et sinus hyperboliques

Les fonctions cosinus et sinus hyperboliques sont définies pour tout réel x par :

$$\operatorname{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \operatorname{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

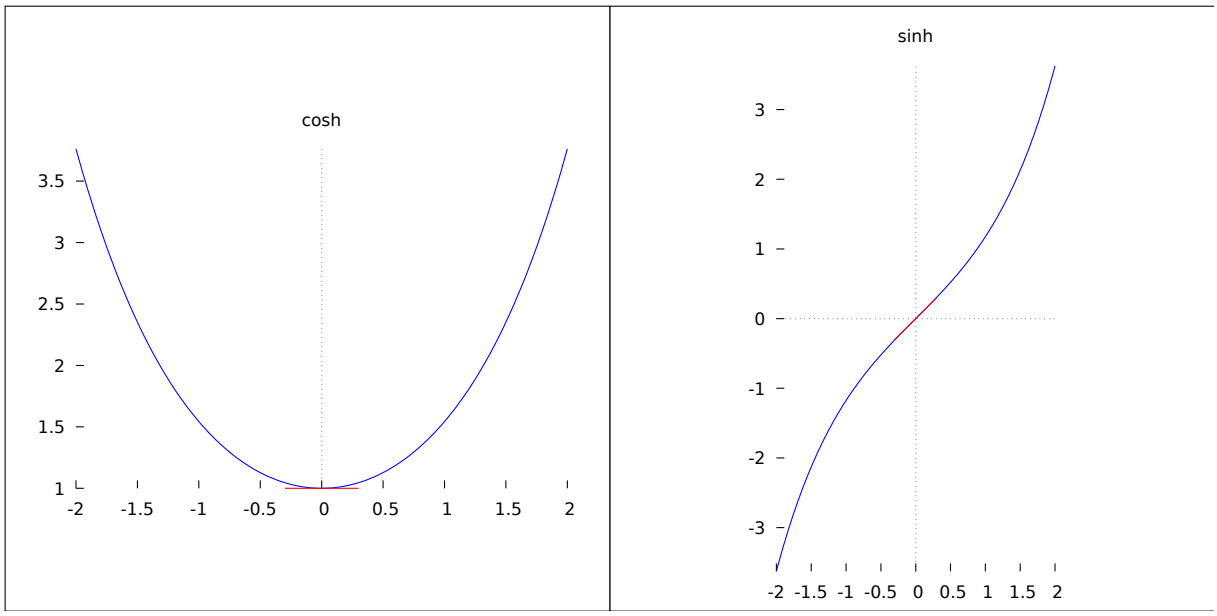
Elles vérifient certaines identités semblables à celles des fonctions sinus et cosinus. La plus importante est sans-doute :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{ch}^2(x) - \operatorname{sh}^2(x) = 1.$$

Elles sont de plus dérivables sur $\mathbb{R}$ et vérifient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{sh}'(x) = \operatorname{ch}(x), \quad \operatorname{ch}'(x) = \operatorname{sh}(x).$$

On en déduit les graphes :



2.5.5 Logarithme en base b

Soit $b > 0$. On pose, pour tout réel x strictement positif :

$$\log_b(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(b)}.$$

Comme le montre immédiatement sa formule, ce logarithme a les mêmes propriétés pour le produit et quotient que le logarithme népérien. Enfin, de façon essentielle, si $a > 0$:

$$\boxed{\log_b(b^a) = a}$$

2.5.6 Fonctions réciproques

2.5.6.1 Fonctions injectives, surjectives, bijectives

Définition 2.5.10 : *Soit f une fonction définie sur I à valeurs dans J. On dit que :*

1. *f est injective si chaque antécédent est unique, c'est-à-dire si :*

$$\forall (x, y) \in I^2, \quad f(x) = f(y) \Longrightarrow x = y.$$

2. *f est surjective si tout élément de J admet un antécédent par f c'est-à-dire si :*

$$\forall y \in J, \quad \exists x \in I, \quad f(x) = y.$$

3. *f est bijective si elle est à la fois injective et surjective.*

Remarque(s) 18 : 1. Il est parfois énoncé directement la définition de la bijectivité d'une fonction de la façon suivante : tout élément de J admet un unique antécédent par f ou :

$$\forall y \in J, \ \exists! x \in I, \quad f(x) = y$$

où le quantificateur $\exists!$ signifie « il existe un unique ».

Exemple(s) 21 :

21.1 Un exemple essentiel de fonction injective est une fonction strictement monotone (il suffit de prendre la contraposée de sa définition). Rappelons que pour montrer qu'une fonction est strictement monotone, il suffit d'examiner sa dérivée si elle existe.

21.2 Il est facile de, à partir d'une fonction, en construire une surjective. Il suffit pour ceci de considérer la (co-)restriction de cette fonction à son image. Plus généralement, une fonction $f : I \to J$ est surjective si et seulement si

$$f(I) = J$$

On en déduit la méthode suivante lorsqu'on cherche à construire une fonction bijective à partir d'une fonction réelle à valeurs réelles dérivable.

1. On cherche un intervalle le plus grand possible sur lequel sa dérivée est strictement positive ou négative (sauf éventuellement en un nombre fini de points). On restreint le fonction à cet intervalle.
2. On calcule l'image de cet intervalle et on (co-)restreint la fonction à cette image.

Exemple(s) 22 :

22.1 (a) La fonction sinus n'est pas bijective. Une étude de fonctions nous montre cependant qu'elle est strictement croissante sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ et que son image une fois restreinte à cet intervalle est $[-1, 1]$. On en déduit que la fonction :

$$f : \begin{cases} [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \longrightarrow [-1, 1] \\ x \longmapsto \sin(x) \end{cases}$$

est bijective.

(b) La fonction cosinus n'est pas bijective. Une étude de fonctions nous montre cependant qu'elle est strictement décroissante sur $[0, \pi]$ et que son image une fois restreinte à cet intervalle est $[-1, 1]$. On en déduit que la fonction :

$$g : \begin{cases} [0, \pi] \longrightarrow [-1, 1] \\ x \longmapsto \cos(x) \end{cases}$$

est bijective.

(c) La fonction tangente n'est pas bijective, mais elle est strictement croissante (et définie !) sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Son image une fois restreinte à cet intervalle est $\mathbb{R}$. On en déduit que la fonction :

$$h : \begin{cases}]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \tan(x) \end{cases}$$

est bijective.

22.2 Soit $f : E \to F$ et $g : F \to E$ deux fonctions. On suppose que :

$$g \circ f = \mathrm{Id}_E.$$

Montrons que :

(a) f est injective :
Soit $(x, x') \in E^2$ tels que $f(x) = f(x')$. Alors $g(f(x)) = g(f(x'))$. Mais $g \circ f = \mathrm{Id}_E$ donc $x = x'$.

(b) g est surjective :
Soit $y \in E$. Alors $g(f(y)) = y$ donc il existe $x = f(y)$ tel que $g(x) = g(f(y)) = y$.

2.5.6.2 Fonction réciproque d'une bijection

À partir d'une fonction bijective, on peut construire sa fonction réciproque :

Définition 2.5.11 : *Soit $f : I \to J$ une fonction bijective. On appelle fonction réciproque de f et on note f^{-1} la fonction définie par :*

$$f^{-1} : \begin{cases} J \longrightarrow I \\ y \longmapsto x, \ f(x) = y. \end{cases}$$

Remarque(s) 19 :

1. Notez qu'il est indispensable que f soit bijective pour que cette définition ait du sens. L'élément x existe car f est surjective et il est unique car f est injective.
2. On remarque que, par définition, si une fonction f est bijective alors f^{-1} existe et vérifie :
$$f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_J, \quad f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_I.$$
3. Réciproquement, si $f : E \to F$ et $g : F \to E$ sont deux fonctions vérifiant :
$$g \circ f = \mathrm{Id}_E \quad \text{et} \quad f \circ g = \mathrm{Id}_F.$$
Alors f est bijective par le dernier exemple du paragraphe précédent et $f^{-1} = g$.

Exemple(s) 23 :

23.1 La fonction réciproque de l'exponentielle est le logarithme, celle du logarithme l'exponentielle.

23.2 Montrons que la fonction ch est bijective sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs dans $[1, +\infty[$ et que

$$\forall x \in [1, +\infty[, \quad \mathrm{ch}^{-1}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}).$$

Démonstration : Il suffit de le vérifier ! Posons, pour $x \in [1, +\infty[$ $g(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$. Alors :

$$\forall x \in [1, +\infty[, \quad \mathrm{ch}(g(x)) = \frac{x + \sqrt{x^2 - 1} + \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1}}}{2} = \frac{2\,x^2 + 2\,x \times \sqrt{x^2 - 1}}{2\,(x + \sqrt{x^2 - 1})} = x.$$

De plus,

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad g(\mathrm{ch}(x)) = \ln(\mathrm{ch}(x) + \sqrt{\mathrm{ch}(x)^2 - 1}) = \ln(\mathrm{ch}(x) + \sqrt{\mathrm{ch}(x)^2 - 1}).$$

Mais comme $\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) = 1$ et pour x positif, $\mathrm{sh}(x) \geqslant 0$:

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad g(\mathrm{ch}(x)) = \ln\left(\mathrm{ch}(x) + \mathrm{sh}(x)\right) = \ln(e^x) = x.$$

■

23.3 Montrons que la fonction réciproque d'une fonction impaire est impaire.

Démonstration : Si $f : E \to F$ est impaire. Alors E est symétrique par rapport à 0 et :

$$\forall x \in E, \quad f(-x) = -f(x).$$

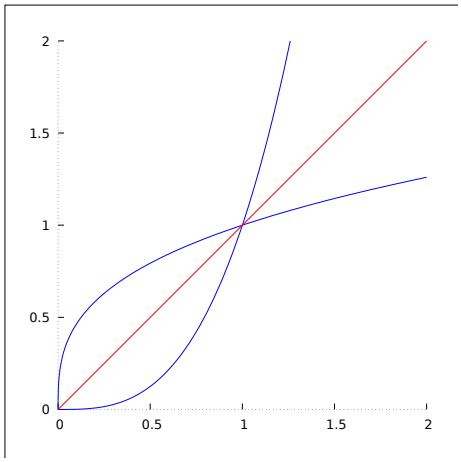
(a) Montrons que F est symétrique par rapport à 0. Soit $y \in F$ et posons $x = f^{-1}(y) \in E$. Alors comme f est impaire :
$$-y = -f(x) = f(-x) \in f(E) = F$$

(b) Montrons maintenant que f^{-1} est impaire. Soit $y \in F$ et posons $x = f^{-1}(y) \in E$. Alors :
$$f^{-1}(-y) = f^{-1}(-f(x)) = f^{-1}(f(-x)) = -x = -f^{-1}(y).$$

■

Pour le fonctions réelles à valeurs réelles, il est très facile de tracer le graphe d'une fonction réciproque f^{-1} à partir ce celui de f. Il s'agit de la symétrie orthogonale du graphe de f par rapport à la droite d'équation $y = x$ en effet, si $f(x) = y$:

$$(y, f^{-1}(y)) = (f(x), x).$$



2.5.6.3 Fonctions trigonométriques réciproques

Rappelons que les trois fonctions suivantes sont bijectives :

$$f : \begin{cases} [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] & \longrightarrow [-1,1] \\ x & \longmapsto \sin(x) \end{cases}; \quad g : \begin{cases} [0,\pi] & \longrightarrow [-1,1] \\ x & \longmapsto \cos(x) \end{cases}; \quad h : \begin{cases}]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[& \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \tan(x) \end{cases}.$$

On définit les fonctions trigonométriques réciproques par :

$$\arcsin = f^{-1} : \begin{cases} [-1,1] \longrightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ x \longmapsto \arcsin(x) \end{cases}; \arccos = g^{-1} : \begin{cases} [-1,1] \longrightarrow [0,\pi] \\ x \longmapsto \arccos(x) \end{cases}; \arctan = h^{-1} : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\\ x \longmapsto \arctan(x) \end{cases}.$$

Le point le plus important pour ces fonctions concerne leurs ensembles de définition. En particulier, les formules suivantes sont **fausses** en dehors des ensembles sur lesquelles elles sont énoncées :

$$\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \quad \arcsin(\sin(x)) = x, \quad \forall x \in [0,\pi], \quad \arccos(\cos(x)) = x, \quad \forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \quad \arctan(\tan(x)) = x.$$

Exemple(s) 24 :

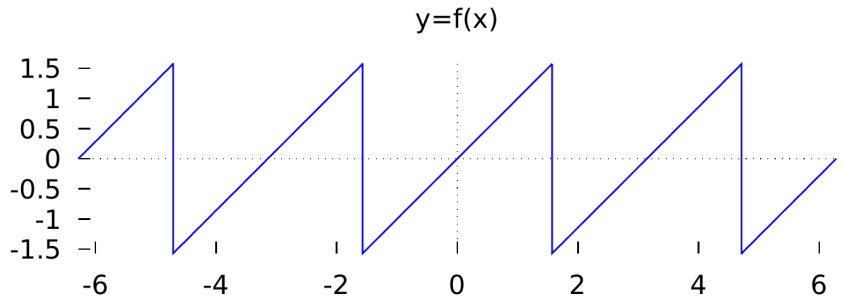
24.1 En particulier, il est intéressant d'étudier la fonction définie par la formule :

$$f(x) = \arctan(\tan(x)).$$

Elle est définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k \times \pi, \quad k \in \mathbb{Z}\right\}$, est impaire et π-périodique. De plus :

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[, \quad f(x) = x.$$

On en déduit le graphe :



24.2 Cependant, à partir des valeurs particulières des fonctions trigonométriques :

x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\sin(x)$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
$\cos(x)$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0
$\tan(x)$	0	$1/\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\times$

les formules d'inversion nous permettent de donner les valeurs particulières :

x	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
$\arcsin(x)$	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\arccos(x)$	$\pi/2$	$\pi/3$	$\pi/4$	$\pi/6$	0

x	0	$1/\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\arctan(x)$	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$

.

Terminons cette partie en parlant de la dérivée d'une fonction réciproque. On a :

Théorème 2.5.1 : *Soit $f : I \to J$ dérivable bijective sur I. On suppose que f' ne s'annule pas sur I. Alors f^{-1} est dérivable sur J et*

$$\forall y \in J, \quad (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$$

Remarque(s) 20 : Il existe de nombreuses façons de retenir ce théorème, plus ou moins mathématiques ;

1. un physicien aimera sans-doute $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$
2. on peut aussi la formule $f(f^{-1}(y)) = y$ grâce à la formule de dérivation des fonctions composées,

aucune de ces astuces ne peut remplacer la connaissance du théorème et de ses hypothèses.

Propriété(s) 2.5.11 :

1. La fonction arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

2. Les fonctions arcsin et arccos sont dérivables sur $]-1,1[$ et vérifient :

$$\forall x \in]-1,1[, \quad \arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Démonstration :

1. Pour la première formule, on remarque que, comme :

$$\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, \quad \tan'(x) = 1 + \tan^2(x) \neq 0$$

la fonction arctan est par la théorème de dérivation des fonctions réciproques dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \arctan'(x) = \frac{1}{1+\tan^2(\arctan(x))} = \frac{1}{1+x^2}.$$

2. Montrons la première formule du deuxième point. La deuxième se montre de façon similaire. On a :

$$\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, \quad \sin'(x) = \cos(x) \neq 0$$

Donc par le théorème de dérivation des fonctions réciproques la fonction arcsin est dérivable sur $]-1,1[= \sin\left(]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\right)$ et :

$$\forall x \in]-1,1[, \quad \arcsin'(x) = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))}.$$

Enfin, on remarque que :

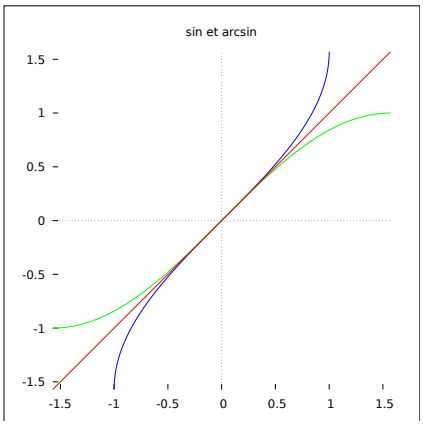
$$\cos^2(\arcsin(x)) + \sin^2(\arcsin(x)) = 1 \iff \cos^2(\arcsin(x)) = 1 - x^2$$

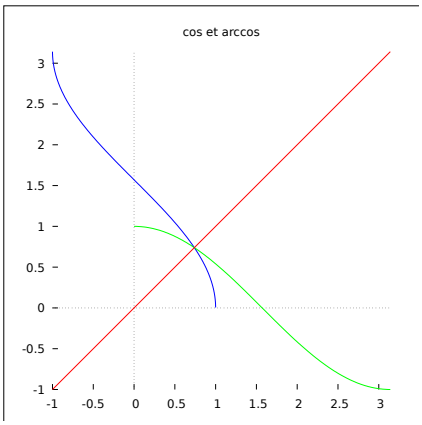
puis que, comme $\arcsin(x) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $\cos(\arcsin(x)) \geqslant 0$. Donc $\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2}$ puis :

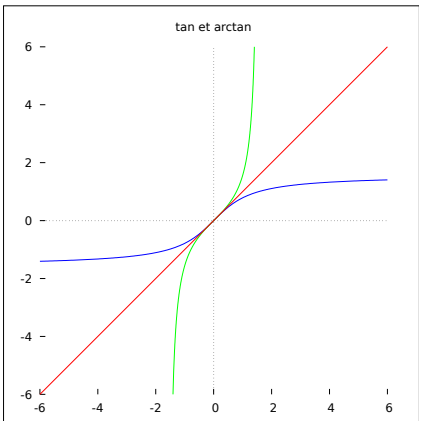
$$\forall x \in]-1,1[, \quad \arcsin'(x) = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

■

Terminons par les graphes de ces fonctions qui sont obtenus par symétrie de ceux des fonctions trigonométriques :







notez qu'en particulier les tangentes verticales de la fonction tan deviennent des tangentes horizontales de la fonction arctan donc :

$$\lim_{x\to+\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2} \quad \lim_{x\to-\infty} \arctan(x) = -\frac{\pi}{2}.$$

2.6 Application à la recherche d'inégalités

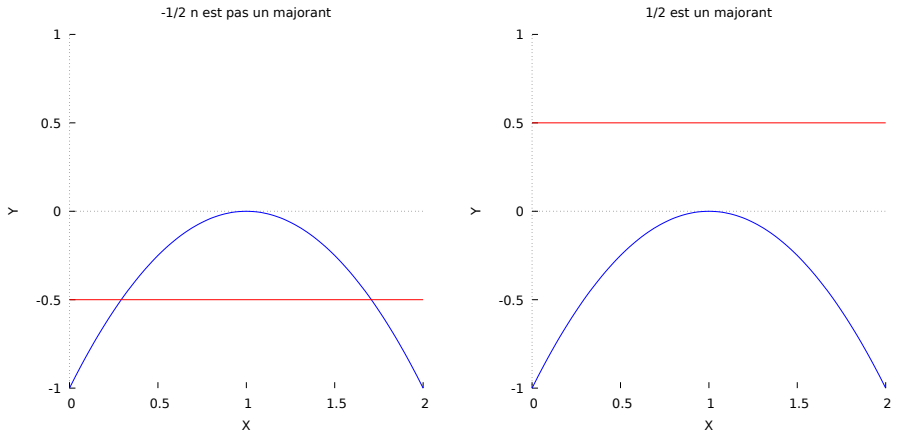
L'étude de fonctions permet également de prouver des inégalités. Commençons par un peu de vocabulaire :

Définition 2.6.12 : *Soit f une fonction à valeurs réelles définie sur un intervalle I. On dit que :*

1. *M est un majorant de f sur I si :*
$$\forall x \in I, \quad f(x) \leqslant M$$
2. *m est un minorant de f sur I si :*
$$\forall x \in I, \quad f(x) \leqslant m$$
3. *M_0 est un maximum de f sur I si c'est un majorant de f et si il existe $x_0 \in I$ tel que $f(x_0) = M_0$*
4. *m_0 est un minimum de f sur I si c'est un minorant de f et si il existe $x_0 \in I$ tel que $f(x_0) = m_0$*

Remarque(s) 21 :

1. Notez que presque toujours les majorants (et les minorants) d'une fonction f ne sont pas uniques. Le fonction cosinus admet par exemple tout réel supérieur à 1 comme majorant.
2. Il est aussi possible qu'une fonction n'admette ni majorant ni minorant ; la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x$ n'a ni majorant ni minorant sur $\mathbb{R}$.
3. Par contre, si une fonction admet un maximum (ou un minimum), celui-ci est unique : nommons $M-1$ et M_2 deux éventuels maximum de f sur I alors par définition il existe x_1 et x_2 tels que $f(x_1) = M_1$ et $f(x_2) = M_2$ donc comme ce sont des majorants :
$$M_1 = f(x_1) \leqslant M_2 \quad \text{et} \quad M_2 = f(x_2) \leqslant M_1$$
donc $M_1 = M_2$.
4. Il est très facile de repérer graphiquement un majorant ou un minorant si l'on connaît le graphe d'une fonction. Par exemple :



5. Il arrive très souvent qu'une fonction admette un majorant mais pas de maximum. Par exemple, la fonction

$$f(x) = -\frac{1}{x}$$

définie sur $\mathbb{R}_+^*$ admet pour majorant 0 mais n'a pas de maximum.

Si l'on cherche à montrer que :

$$\forall x \in I, \quad f(x) \leqslant g(x)$$

alors il suffit de montrer que 0 est un majorant de $f-g$ (ou un minorant de $g-f$) à l'aide d'une étude de fonction. Voici quelques exemples essentiels :

Exemple(s) 25 :

25.1 Commençons par prouver que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x \geqslant x+1$$

c'est l'inégalité géométrique que l'on a utilisée lors des théorèmes de comparaison. On pose :

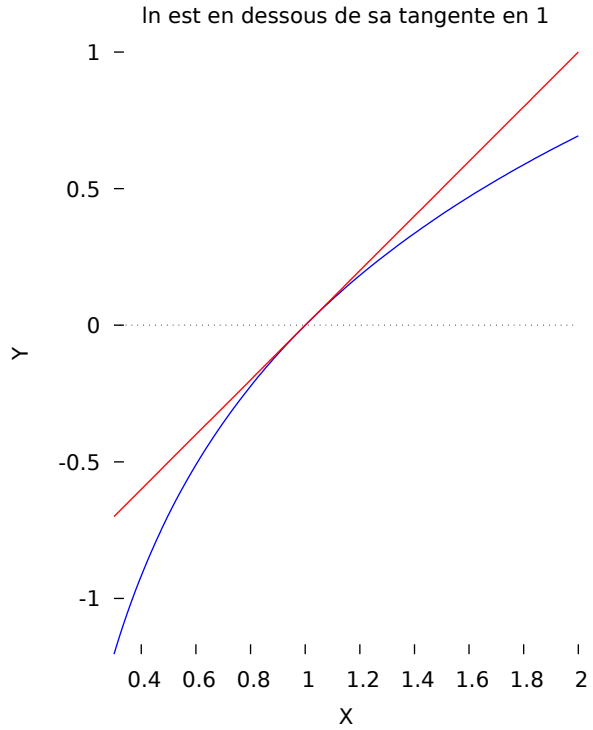
$$f(x) = e^x - (x-1)$$

Alors $f'(x) = e^x - 1$ donc f est décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et croissante sur $\mathbb{R}_+$. On en déduit que f admet un minimum en 0, c'est-à-dire l'inégalité recherchée.

25.2 La fonction logarithme vérifie aussi une inégalité géométrique du même type :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \ln(x) \leqslant x-1}$$

on dit que la fonction logarithme est « en dessous » de sa tangente en 1.



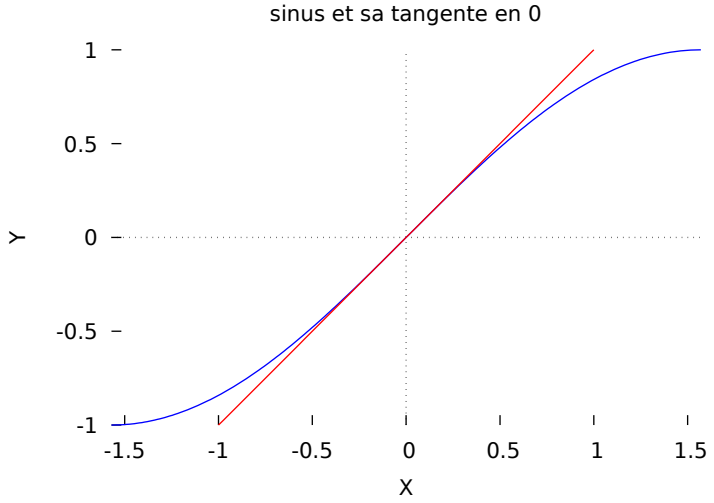
En effet, si :

$$f(x) = \ln(x) - x + 1$$

Alors $f'(x) = \frac{1}{x} - 1$ donc f est croissante sur $]0, 1[$ et décroissante sur $]1, +\infty[$. Elle admet donc un maximum en 1, ce qui montre l'inégalité recherchée.

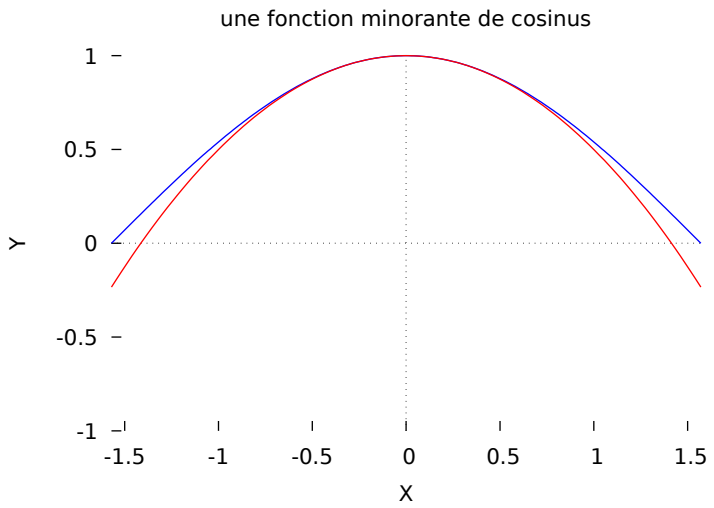
25.3 Pour la fonction sinus, il est important de retenir que l'inégalité suivante, qui se montre en n'oubliant pas d'utiliser la parité pour se ramener à une démonstration sur $\mathbb{R}_+$:

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad |\sin(x)| \leqslant |x|}$$



25.4 Enfin, pour la fonction cosinus, l'inégalité suivante se montre à l'aide de celle du sinus :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos(x) \geqslant 1 - \frac{x^2}{2}$$



Chapitre 3

Nombres complexes

3.1 Définition

Définition 3.1.13 : *On considère l'ensemble des points du plan, que l'on note*

$$\mathbb{C} \overset{Not.}{=} \{(x, y),\ x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}\},$$

sur lequel on définit deux lois (ou opérations) notées $+$ et $\times$ par, pour tous réels a, b, c et d :

$$(a, b)+(c, d) = (a + c, b + d)$$

$$(a, b)\times(c, d) = (a \times c - b \times d, a \times d + b \times c).$$

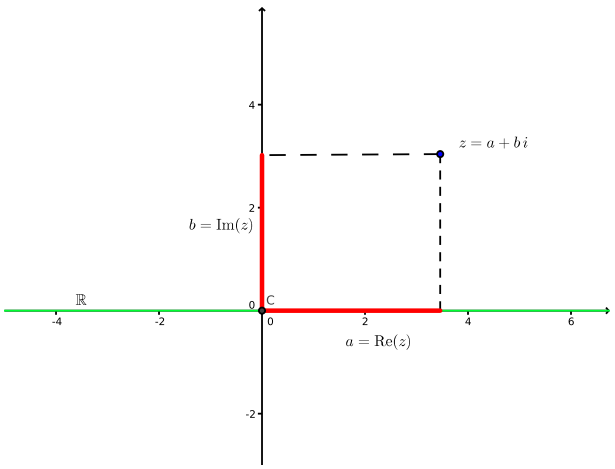
Notation(s) : Si $z = (a, b)$ est un élément de $\mathbb{C}$, on le notera :

$$z \overset{Not.}{=} a + b\,i$$

Et on dira que $a + b\,i$ est *l'affixe* de ce complexe. On appellera de plus a *la partie réelle* du complexe z et b sa *partie imaginaire.* On les notera :

$$a = \mathrm{Re}(z), \quad b = \mathrm{Im}(z).$$

On verra dans la suite l'ensemble des réels comme le sous ensemble des complexes donc la partie imaginaire est nulle ; en particulier : $0 = 0 + 0\,i$, $\quad 1 = 1 + 0\,i$.



Remarque(s) 22 : Il existe une astuce qui permet de retenir extrêmement facilement la formule du produit ; avec la notation $z = a + b\,i$, *tout se passe comme si* il suffisait de se souvenir de la règle de calcul supplémentaire

$$\boxed{i^2 = -1}$$

puis d'utiliser les règles de calcul usuelles. Notez bien que i n'est pas un réel mais juste une notation pour $(0, 1)$!

Il est important de remarquer qu'il est possible de faire les calculs dans $\mathbb{C}$ de la même façon que dans les réels :

Proposition 3.1.3 : *Soit z_1, z_2 et z_3 trois éléments de $\mathbb{C}$ (dans la suite, on notera $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ ou $(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3$) alors :*

1. $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$, $z_1 \times (z_2 \times z_3) = (z_1 \times z_2) \times z_3$ *associativité de la somme et du produit,*
2. $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$, $z_1 \times z_2 = z_2 \times z_1$ *commutativité de la somme et du produit,*
3. $z_1 \times (z_2 + z_3) = z_1 \times z_2 + z_1 \times z_3$, *distributivité du produit sur la somme,*
4. $z_1 + 0 = z_1$, $z_1 \times 1 = z_1$ *0 est un élément neutre pour la somme et 1 pour le produit,*

Démonstration : Il s'agit dans tous les cas d'un calcul direct. ■

Remarque(s) 23 : 1. Si z et z' sont deux complexes, on a par définition :

$$\mathrm{Re}(z + z') = \mathrm{Re}(z) + \mathrm{Re}(z') \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}(z + z') = \mathrm{Im}(z) + \mathrm{Im}(z')$$

mais attention :

$$\mathrm{Re}(z \times z') = \mathrm{Re}(z) \times \mathrm{Re}(z') - \mathrm{Im}(z) \times \mathrm{Im}(z') \quad \mathrm{Im}(z \times z') = \mathrm{Re}(z) \times \mathrm{Im}(z') + \mathrm{Im}(z) \times \mathrm{Re}(z').$$

N'inventez pas de formules fausses...

3.2 Premières opérations géométriques

Par sa nature géométrique l'ensemble des complexes $\mathbb{C}$ est muni de diverses opérations géométriques :

Définition 3.2.14 : *Soit $z = a + b\,i$ un complexe. Alors :*

1. *La distance de z à 0 est notée $|z|$ et appelée module de z ; par le théorème de Pythagore $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.*
2. *La symétrie orthogonale par rapport à l'axe des réels de z est appelée conjugaison complexe de z et est notée $\bar{z}$; clairement, $\bar{z} = a - b\,i$.*

Remarque(s) 24 : 1. On remarque facilement que si z est un complexe alors :

$$|z| = 0 \iff z = 0.$$

2. Il est important de savoir passer de la géométrie à l'algèbre à l'aide de ces opérations. En particulier :
   (a) $z = \bar{z} \iff z \in \mathbb{R}$.

(b) $z = -\bar{z} \iff z \in i\,\mathbb{R}$.

(c) Si M_0 a pour affixe z_0 et r est un réel strictement positif, alors :

i. Le cercle de centre M_0 et de rayon r est l'ensemble des points :

$$\mathcal{C}(M_0, r) = \{z \in \mathbb{C}, \quad |z - z_0| = r\}$$

ii. Le disque de centre M_0 et de rayon r est l'ensemble des points :

$$\mathcal{D}(M_0, r) = \{z \in \mathbb{C}, \quad |z - z_0| \leqslant r\}\,.$$

La propriété suivante permet de faire le lien entre calculs et géométrie :

Proposition 3.2.4 : *Soit $z_1, z_2 \in \mathbb{C}^2$. On a :*

1. $z_1 \times \bar{z}_1 = |z_1|^2$
2. *Compatibilité avec les opérations :*
   (a) $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$,
   (b) $\overline{z_1 \times z_2} = \bar{z}_1 \times \bar{z}_2$ *et* $|z_1 \times z_2| = |z_1| \times |z_2|$,
   (c) *si* $z_2 \neq 0$, $\overline{z_1/z_2} = \overline{z_1}/\overline{z_2}$ *et* $|z_1/z_2| = |z_1|/|z_2|$.

Remarque(s) 25 : 1. Si z est un complexe différent de zéro (on notera dans la suite $z \in \mathbb{C}^*$) alors :

$$z \times \left(\frac{1}{|z|^2} \times \bar{z}\right) = 1$$

cette égalité nous incite alors à noter :

$$\frac{1}{z} \overset{Not.}{=} \frac{1}{|z|^2} \times \bar{z}.$$

2. De la définition de la conjugaison complexe, on déduit immédiatement :

$$\mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}\,(z + \bar{z}) \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}(z) = \frac{1}{2\,i}\,(z - \bar{z}).$$

Exemple(s) 26 :

26.1 $\frac{1+2\,i}{1+i} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\,i$.

26.2 Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$. Alors :

$$\frac{1-z}{1+z} \in \mathbb{R} \iff z \in \mathbb{R}.$$

26.3 Remarquons que :

$$\mathrm{Re}(z) \leqslant |z| \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}(z) \leqslant |z|$$

De plus

$$z \in \mathbb{R}_+ \iff \mathrm{Re}(z) = |z|.$$

Proposition 3.2.5 : *Soit z et z' deux complexes. Alors :*

$$|z + z'| \leqslant |z| + |z'|$$

Et l'on a égalité si et seulement si z et z' sont alignés, de même sens.

Démonstration : Soit z et z' deux complexes. On a :

$$|z+z'|^2 = (z+z') \times (\overline{z+z'}) = z \times \bar{z} + z \times \overline{z'} + \underbrace{\bar{z} \times z'}_{=\overline{z \times \overline{z'}}} + z' \times \overline{z'} = |z|^2 + 2\,\mathrm{Re}(z \times \overline{z'}) + |z'|^2.$$

Mais de plus :

$$(|z| + |z'|)^2 = |z|^2 + 2\,|z| \times \underbrace{|z'|}_{=|\overline{z'}|} + |z'|^2 = |z|^2 + 2\,|z \times \overline{z'}| + |z'|^2.$$

L'inégalité recherché est donc une conséquence de :

$$\mathrm{Re}(z \times \overline{z'}) \leqslant |z \times \overline{z'}|$$

et le cas d'égalité vient de ce que nous avions vu dans la remarque précédente.

■

Remarque(s) 26 : 1. Géométriquement, cette inégalité se traduit par :

Dans un triangle, la longueur d'un côté est plus petite que la somme des longueurs des deux autres.

Exemple(s) 27 :

27.1 Le cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire peut servir à déterminer le maximum d'une fonction. Par exemple, on a, si $|z| \leqslant 1$:

$$|z + (1+i)| \leqslant |z| + |1+i| \leqslant 1 + \sqrt{2}.$$

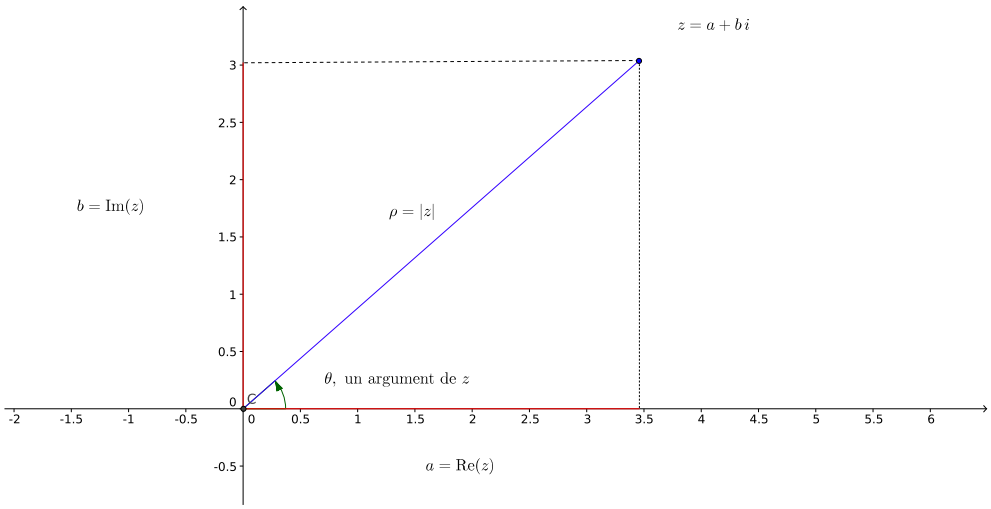
Déterminons en quel complexe (s'il existe) $|z-(1+i)|$ prend cette valeur. Pour que ce soit le cas, l faut et il suffit que les deux inégalités soient des égalités, ou encore que :

$$z = \lambda \times (-(1+i)), \quad \lambda \in \mathbb{R}_+, \quad \text{et} \quad |z| = 1.$$

On en déduit que cette quantité est maximale pour $z_0 = -\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$.

3.3 Arguments d'un nombre complexe non nul

Il n'existe une autre façon de décrire un point du plan que de donner ses coordonnées, c'est ce qu'on appelle les *coordonnées polaires* ou encore en termes de nombres complexes *le module et l'argument*. Faisons un dessin.



Pour un complexe non nul $z = a + i\,b$, on note $\rho = |z| \in \mathbb{R}^*$ et on rappelle qu'il s'agit du module du complexe z. On désigne également par θ et on appelle *argument du complexe* z **un** angle direct entre l'axe des abscisses et le vecteur $\overrightarrow{OM}$, $M = (a, b)$. Notez que cet angle existe car le vecteur $\overrightarrow{OM}$ est non nul, mais qu'il est loin d'être unique ! En effet, si θ est un tel angle, toute valeur du type $\theta + 2\,k\,\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ conviendra aussi. On note, pour θ un réel :

$$\boxed{e^{i\,\theta} \overset{\text{Not.}}{=} \cos(\theta) + \sin(\theta)\,i.}$$

Le complexe z peut donc s'écrire : $\boxed{z = \rho\,e^{i\,\theta}.}$

Exemple(s) 28 :

28.1 On a : $2 = 2\,e^{i\,0}$ donc un argument de 2 est $\theta = 0$.

28.2 On a : $-2 = 2\,e^{i\,\pi}$ donc un argument de -2 est $\theta = -\pi$.

28.3 On a : $|1 + i| = \sqrt{2}$ donc :

$$1 + i = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\,i\right) = \sqrt{2}\,e^{i\,\frac{\pi}{4}}.$$

28.4 On a $|\sqrt{6} + i\,\sqrt{2}| = 2\,\sqrt{2}$ donc :

$$\sqrt{6} + i\,\sqrt{2} = 2\,\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\,\frac{1}{2}\right) = 2\,\sqrt{2}\,e^{i\,\frac{\pi}{6}}.$$

Trouver un argument d'un complexe non nul quelconque se fait à l'aide des fonctions trigonométriques inverses. Supposons que x est la partie réelle de $z = \rho\,e^{i\,\theta} \neq 0$ et y sa partie imaginaire. Alors rappelons que :

$$\boxed{\rho = \sqrt{x^2 + y^2}}$$

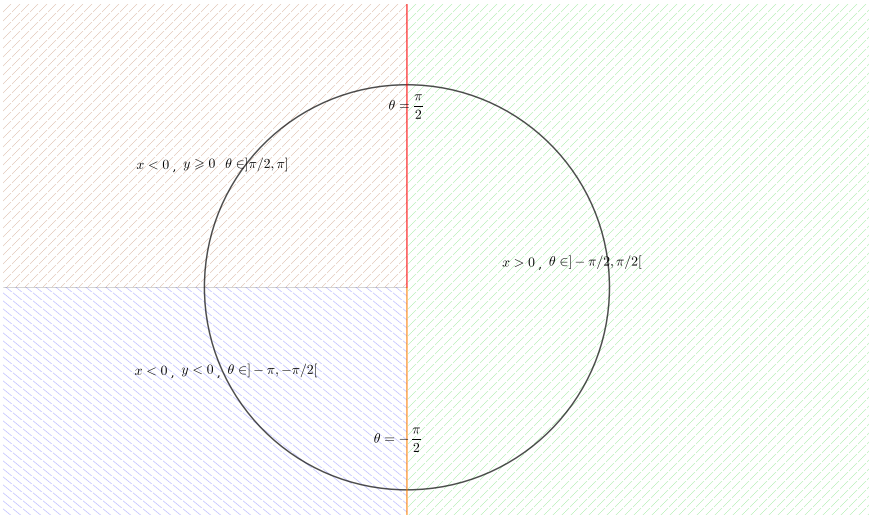
pour retrouver θ, on utilise que :

$$\boxed{\cos(\theta) = \frac{x}{\rho} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin(\theta) = \frac{y}{\rho} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \text{donc} \quad \tan(\theta) = \frac{y}{x}.}$$

La dernière formule n'étant valable que si $x \neq 0$. Cette formule nous permet, grâce à la fonction arctan de donner des formules pour obtenir un argument à partir d'une partie réelle et d'une partie imaginaire. Résumons-les : un argument $\theta \in]-\pi, \pi]$ du complexe $z = x + y\,i$ est donné par :

$$\boxed{\theta = \begin{cases} \arctan(\frac{y}{x}) & x > 0 \\ \arctan(\frac{y}{x}) + \pi & y \geqslant 0\ ,\ x < 0 \\ \arctan(\frac{y}{x}) - \pi & y < 0\ ,\ x < 0 \\ \frac{\pi}{2} & y > 0\ ,\ x = 0 \\ -\frac{\pi}{2} & y < 0\ ,\ x = 0 \end{cases}}$$

Que l'on peut retenir plus facilement à l'aide du dessin suivant :



Démonstration : Les deux derniers cas sont immédiats. Pour les autres, si l'on cherche un argument $\theta \in]-\pi, \pi]$:

1. $x > 0 \Rightarrow \theta \in]-\pi/2, \pi/2[$,
2. $(y \geqslant 0\ ,\ x < 0) \Rightarrow \theta \in]\pi/2, \pi]$,
3. $(y < 0,\ x < 0) \Rightarrow \theta \in]-\pi, -\pi/2[$.

et rappelons qu'on a précédemment déterminé la valeur de la fonction :

$$f(\theta) = \arctan(\tan(\theta))$$

sur $]-\pi, \pi] \setminus \{-\pi/2, \pi/2\}$. Il y a trois cas :

1. si $\theta \in]-\pi/2, \pi/2[$, $f(\theta) = \theta$
2. si $\theta \in]\pi/2, \pi]$, $f(\theta) = \theta - \pi$,
3. si $\theta \in]-\pi, -\pi/2]$, $f(\theta) = \theta + \pi$.

Il suffit alors d'appliquer dans les trois cas cette formule à l'égalité

$$f(\theta) = \arctan(\tan(\theta)) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right).$$

■

Exemple(s) 29 :

29.1 Un argument de $1 + i$ est :

$$\theta = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}.$$

On en déduit : $1 + i = \sqrt{2}\, e^{i\,\pi/4}$.

29.2 Un argument de $z = -4 - 10\,i$ est :

$$\theta = \arctan\left(\frac{5}{2}\right) - \pi$$

Propriété(s) 3.3.12 :

1. $e^{i\,0} = 1$, $e^{i\,\frac{\pi}{2}} = i$, $e^{i\,\pi} = -1$, $e^{-i\,\frac{\pi}{2}} = -i$.
2. Soit $(\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$. Alors : $e^{i\,(\theta+\theta')} = e^{i\,\theta} \times e^{i\,\theta'}$.
3. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Alors : $\overline{e^{i\,\theta}} = e^{-i\,\theta} = \frac{1}{e^{i\,\theta}}$.
4. On a : $\cos(\theta) = \text{Ré}(e^{i\,\theta})$, $\sin(\theta) = \text{Im}(e^{i\,\theta})$.
5. Enfin, on a les *formules d'Euler* :

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\,\theta} + e^{-i\,\theta}}{2}, \quad \sin(\theta) = \frac{e^{i\,\theta} - e^{-i\,\theta}}{2\,i}.$$

Exemple(s) 30 :

30.1 Cherchons les entiers relatifs m tels que :

$$(1+i)^m \in \mathbb{R}.$$

On a : $1+i = \sqrt{2}\, e^{i\,\pi/4}$ donc :

$$(1+i)^k = (\sqrt{2})^m\, e^{i\,m\,\pi/4}$$

Or un tel complexe est réel si et seulement si son argument est égal à 0 ou π modulo $2\,\pi$. Ou encore :

$$\exists k \in \mathbb{Z}, \quad m\,\frac{\pi}{4} = \pi\, k \Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, \quad m = 4\, k.$$

L'ensemble des solutions est donc celui des multiples de 4 : $\mathcal{S} = 4\,\mathbb{Z}$.

Parfois, il est plus facile d'utiliser la propriété suivante pour calculer un argument :

Propriété(s) 3.3.13 : Si θ est un argument de z et θ' un argument de z', alors :

1. $\theta + \theta'$ est un argument de $z \times z'$
2. si $z' \neq 0$, $\theta - \theta'$ est un argument de $\frac{z}{z'}$.

Remarque(s) 27 : Attention à bien parler d'**un** argument et non de l'argument ! En particulier, n'énoncez jamais cette propriété comme une égalité.

Exemple(s) 31 :

31.1 Soit :

$$z_1 = \sqrt{6} + i\,\sqrt{2},\ z_2 = 1+i, \quad \text{et} \quad z_3 = \frac{z_1}{z_2}.$$

Un argument de z_1 est $\frac{\pi}{6}$ et un argument de z_2 est $\frac{\pi}{4}$. on en déduit qu'un argument de $z_3 = z_1/z_2$ est $\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{12}$.

31.2 Considérons deux réels A et B tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = A\,\cos(x) + B\,\sin(x).$$

Alors, si l'on considère le complexe (un physicien parlerait de diagramme de Fresnel) :

$$z = A + i\,B = \rho\, e^{i\,\theta} = \rho\,\cos(\theta) + i\,\rho\,\sin(\theta),$$

on peut réécrire la fonction f :

$$f(x) = \rho\,(\cos(\theta)\,\cos(x) + \sin(\theta)\,\sin(x)) = \rho\,\cos(x-\theta).$$

On appelle alors ρ l'amplitude de f et θ sa phase.

3.3.1 Formules de l'arc-moitié

Si θ_1 et θ_2 sont deux réels, alors :

$$\boxed{e^{i\,\theta_1}+e^{i\,\theta_2}=e^{i\,\frac{\theta_1+\theta_2}{2}}\times(e^{i\,\frac{\theta_1-\theta_2}{2}}+e^{-i\,\frac{\theta_1-\theta_2}{2}})=2\,\cos\left(\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\right)\times e^{i\,\frac{\theta_1+\theta_2}{2}},}$$

et de même :

$$\boxed{e^{i\,\theta_1}-e^{i\,\theta_2}=e^{i\,\frac{\theta_1+\theta_2}{2}}\times(e^{i\,\frac{\theta_1-\theta_2}{2}}-e^{-i\,\frac{\theta_1-\theta_2}{2}})=2\,i\,\sin\left(\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\right)\times e^{i\,\frac{\theta_1+\theta_2}{2}}.}$$

On appelle ces deux formules : **formules de « l'arc-moitié »**. La première formule de l'arc-moitié nous donne en identifiant parties réelles et imaginaires :

$$\boxed{\cos(p)+\cos(q)=2\,\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)\,\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\quad\text{et}\quad\sin(p)+\sin(q)=2\,\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)\,\sin\left(\frac{p+q}{2}\right).}$$

et la deuxième :

$$\boxed{\cos(p)-\cos(q)=-2\,\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\,\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\quad\text{et}\quad\sin(p)-\sin(q)=2\,\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\,\cos\left(\frac{p+q}{2}\right).}$$

3.4 Résolutions d'équations

3.4.1 Racines carrées d'un nombre complexe, equations du second degré

Supposons que nous cherchions, pour un complexe $z=a+b\,i$ un complexe δ appelé racine carrée de z [1] vérifiant :

$$\delta^2=a+b\,i$$

Il existe deux méthodes pour calculer une telle racine carrée :

1. La méthode trigonométrique : si l'on écrit le complexe z sous la forme trigonométrique :

$$z=\rho\times e^{i\,\theta}$$

alors les racines carrées de z sont les complexes :

$$\boxed{\delta_1=\sqrt{\rho}\,e^{i\,\theta/2}\quad\text{et}\quad\delta_1=-\sqrt{\rho}\,e^{i\,\theta/2}.}$$

Exemple(s) 32 :

32.1 Les racines carrées de $-1=e^{i\,\pi}$ sont :

$$\delta_1=e^{i\,\pi/2}=i\quad\text{et}\quad\delta_2=-e^{i\,\pi/2}=-i$$

32.2 plus généralement, si a est un réel négatif, $a=|a|\times e^{i\,\pi}$ donc ses racines carrées sont :

$$\delta_1=i\,\sqrt{|a|}\quad\text{et}\quad\delta_2=-i\,\sqrt{|a|}.$$

32.3 Les racines complexes de $z=i=e^{i\,\pi/2}$ sont :

$$\delta_1=e^{i\,\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\,i\quad\text{et}\quad\delta_2=-e^{i\,\frac{\pi}{4}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\,i$$

Malheureusement, cette méthode peut parfois être un peu compliquée si l'angle trouvé pour la racine carrée ne fait pas partie du « catalogue » des angles dont on sait facilement calculer le cosinus et le sinus.

1. Il est totalement *interdit* d'utiliser la notation $\sqrt{\delta}$ pour un complexe (sauf si c'est un réel positif) !

2. On peut cependant toujours utiliser la méthode algébrique, dont l'idée est trouver parties réelles et imaginaires des racines carrées en résolvant astucieusement un système :
   (a) On écrit $\delta = x + y\,i$ et on dit qu'il est racine carrée de z si et seulement si :
   $$x^2 - y^2 + 2\,x \times y\,i = \delta^2 = a + b\,i$$
   ou encore :
   $$\begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2\,x \times y = b \end{cases}$$
   (b) Malheureusement ces équations sont en général difficiles à résoudre... il existe heureusement une astuce : l'équation $\delta^2 = a + b\,i$ implique aussi l'égalité des modules : $x^2 + y^2 = |\delta^2| = |a + b\,i| = \sqrt{a^2 + b^2}$; on en déduit le système :
   $$\begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} \\ 2\,x \times y = b \end{cases}$$
   (c) On résout le système : les deux premières lignes donnent x^2 et y^2 ce qui détermine x et y au signe près, signe que l'on détermine avec la dernière équation.

Exemple(s) 33 :

33.1 Cherchons les racines carrées complexes de $z = 8 - 6\,i$. Le complexe $\delta = x + y\,i$ est racine carrée de z si et seulement si :
$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 8 \\ x^2 + y^2 = 10 \\ 2\,x \times y = -6 \end{cases}$$
Les deux premières équations donnent :
$$x = \pm 3 \quad \text{et} \quad y = \pm 1$$
mais par la troisième équation, x et y sont de signes opposés, donc les racines carrées de z sont :
$$\delta_1 = 3 - i \quad \text{et} \quad \delta_2 = -3 + i.$$

Théorème 3.4.2 : *Soit $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$, $a \neq 0$. Soit δ une racine carrée de $\Delta = b^2 - 4\,a\,c$. Alors l'équation :*
$$a\,z^2 + b\,z + c = 0$$
admet pour solutions :
$$z_1 = \frac{-b + \delta}{2\,a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b - \delta}{2\,a}.$$

Démonstration : Remarquons que, si δ est une racine carrée de Δ, $\Delta = \delta^2$. On peut donc écrire, pour $z \in \mathbb{C}$:
$$a\,z^2 + b\,z + c = a\left(\left(z + \frac{b}{2\,a}\right)^2 + \frac{\overbrace{4\,a\,c - b^2}^{=-\Delta}}{4\,a^2}\right) = a\left(\left(z + \frac{b}{2\,a}\right)^2 - \left(\frac{\delta}{2\,a}\right)^2\right) = a\,(z - z_1)\,(z - z_2).$$
Donc, comme $a \neq 0$ les solutions de l'équation
$$a\,z^2 + b\,z + c = a\,(z - z_1)\,(z - z_2) = 0$$
sont z_1 et z_2.

■

Remarque(s) 28 : 1. Remarquez que, si $\Delta = 0$, $z_1 = z_2$, il n'y a alors qu'une seule solution.

2. Dans la preuve, on a vu qu'il est toujours possible de factoriser sous la forme :

$$\boxed{a\,z^2 + b\,z + c = a\,(z - z_1)\,(z - z_2)}$$

on en déduit, en développant :

$$\boxed{z_1 + z_2 = -\frac{b}{a} \text{ et } z_1\,z_2 = \frac{c}{a}.}$$

3. Si a, b et c sont réels et $\Delta < 0$, une racine carrée de Δ est $\delta = i\,\sqrt{|\Delta|}$ on retrouve donc les formules :

$$z_1 = \frac{-b + i\,\sqrt{|\Delta|}}{2\,a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b - i\,\sqrt{|\Delta|}}{2\,a}$$

En particulier, $z_1 = \bar{z}_2$. Attention, ceci n'est plus valable si les coefficients ne sont pas réels !

Exemple(s) 34 :

34.1 Les racines de l'équation :

$$z^2 + z + 1 = 0$$

sont

$$z_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,i = \exp\left(\frac{2\,i\,\pi}{3}\right) \quad \text{et} \quad z_2 = z_1^2$$

on notera :

$$\boxed{j \overset{Not.}{=} z_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,i = \exp\left(\frac{2\,i\,\pi}{3}\right).}$$

Il y a quelques identités importantes à connaître pour ce complexe :

$$\boxed{1 + j + j^2 = 0 \quad j^3 = 1, \quad \bar{j} = j^2.}$$

34.2 Résolvons l'équation :

$$z^2 + (-1 - 3\,i)\,z + 3\,i - 4 = 0$$

Son discriminant vaut :

$$\Delta = (-1 - 3\,i)^2 - 4\,(3\,i - 4) = 8 - 6\,i.$$

Les racines carrées de Δ ont été calculées dans l'exemple précédent. Elles valent :

$$\delta_1 = 3 - i \quad \text{et} \quad \delta_2 = -3 + i.$$

On en déduit que les racines de l'équation sont :

$$z_1 = \frac{-(-1 - 3\,i) + \delta_1}{2} = 2 + i \quad \text{et} \quad z_1 = \frac{-(-1 - 3\,i) + \delta_2}{2} = -1 + 2\,i.$$

3.4.2 Équations polynomiales de degré supérieur

3.4.2.1 Méthode par factorisation

Une expression du type :

$$P(z) = a_n\, z^n + \cdots + a_1\, z + a_0$$

est appelé polynôme, et $a_0, \ldots, a_n$ ses coefficients, bien souvent complexes. Si $a_n \neq 0$, on dit que P est de **degré** n et que a_n est son **coefficient dominant**.
Le but de ce paragraphe est de donner quelques idées théoriques et pratiques pour résoudre l'équation $P(z) = 0$ pour $z \in \mathbb{C}$. Les solutions de cette équation sont souvent appelées **racines** de P.

Théorème 3.4.3 (D'Alembert-Gauss) :
Tout polynôme de complexe non constant admet une racine complexe.

Remarque(s) 29 :
1. La preuve de ce théorème est hors de portée des outils de sup'. Vous avez cependant le droit d'utiliser son résultat.
2. Ce résultat est souvent appelé théorème fondamental de l'algèbre. Il doit vous surprendre ! Le théorème des valeurs intermédiaires assure que tout polynôme de degré **impair** réel admet une racine, mais on ne sait rien à priori sur **tous** les polynômes de degré pair. En passant de $\mathbb{R}$ à $\mathbb{C}$, on ajoute **une** racine du polynôme $z^2 + 1$, ce qui suffit à donner une racine à **tous** les polynômes de degré pair.
3. Ce résultat est purement théorique. Contrairement au cas réel, il n'est pas possible de donner une valeur approchée de ces racines grâce à une étude de fonctions.

Propriété(s) 3.4.14 : Le complexe z_0 est racine du polynôme P si et seulement si on peut écrire :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad P(z) = (z - z_0)\, Q(z),$$

où Q est un polynôme.

Démonstration : La réciproque est immédiate. Montrons le sens direct. Si z_0 est une racine de P, alors 0 est une racine de la fonction polynomiale définie par :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad P_0(z) = P(z + z_0).$$

On peut alors écrire pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$P_0(z) = b_n\, z^n + \cdots + b_1\, z + \underbrace{b_0}_{=0 \text{ car } P_0(0)=0} = z\, Q_0(z)$$

et donc $P(z) = P_0(z - z_0) = (z - z_0)\, Q_0(z - z_0) = (z - z_0)\, Q(z)$.

■

Remarque(s) 30 :
1. L'utilisation répétée de cette propriété et du théorème de d'Alembert-Gauss nous permet donc d'affirmer que si P est un polynôme non nul de degré n, on peut l'écrire :

$$P(z) = a\,(z - z_0)\,(z - z_1) \cdots (z - z_n)$$

où a est son coefficient dominant et $z_0, z_1, \ldots, z_n$ sont ses racines. En particulier, $P(z) = 0$ **admet toujours moins de racines que le degré de** P.
2. Une autre utilité de cette propriété est le corollaire :

Si un polynome P a plus de racines que son degré, c'est le polynôme nul.

Méthode : Une méthode de résolution de $P(z) = 0$ est donc la suivante :

1. on cherche une racine z_0 de P, 2. on écrit : $P(z) = (z - z_0)\,Q(z)$, 3. on recommence avec $Q(z) = 0$.

Bien entendu, cette méthode suppose qu'on arrive à « trouver » une racine. Voici quelques « astuces » pour y parvenir. Cependant, Galois a montré qu'il n'est pas possible d'exprimer les solutions de

$$z^5 - z + 1 = 0$$

à l'aide de racines n-ièmes. Ne vous attendez donc pas à une méthode générale !

1. Si P est un polynôme à coefficients entiers et qu'il admet une solution entière, alors elle divise son coefficient constant.
2. Si le complexe z_0 est racine d'un polynôme à coefficients **réels** P, alors $\overline{z_0}$ aussi.
3. Pensez à des changements de variables pour réduire le degré (équations bicarrées par exemple...).

Exemple(s) 35 :

35.1 $P(z) = z^3 - z^2 - z - 2$ admet pour racine 2. On peut donc le factoriser par $z - 2$. On écrit :

$$\begin{array}{rrrr|l} z^3 & -z^2 & -z & -2 & z \quad -2 \\ \cline{5-5} -z^3 & +2\,z^2 & & & z^2 \quad +z \quad +1 \\ \cline{1-2} & z^2 & & & \\ & -z^2 & +2\,z & & \\ \cline{2-3} & & z & & \\ & & -z & +2 & \\ \cline{3-4} & & & 0 & \end{array}$$

donc $P(z) = (z - 2)\,(z^2 + z + 1)$. Les solutions de $P(z) = 0$ sont donc $z = 2$, $z = j$ et $z = j^2$.

35.2 Le polynôme $P(z) = z^3 + z^2 + z + 1$ admet pour racines -1, i et donc $-i$. Ce sont donc les solutions de l'équation $P(z) = 0$. De plus :

$$P(z) = (z + 1)\,(z - i)\,(z + i) = (z + 1)\,(z^2 + 1).$$

35.3 Le polynôme $P(z) = z^4 + 1$ est **bicarré**. On peut donc poser $Z = z^2$ et écrire :

$$z^4 + 1 = Z^2 + 1 = (Z - i)\,(Z + i) = (z^2 - i)\,(z^2 + i)$$

en utilisant la méthode exponentielle, il est maintenant facile de résoudre $z^2 = i = e^{i\frac{\pi}{2}}$ et $z^2 = -i = e^{-i\frac{\pi}{2}}$. Les racines complexes de P sont donc :

$$\{e^{i\frac{\pi}{4}}, -e^{i\frac{\pi}{4}}, e^{-i\frac{\pi}{4}}, -e^{i\frac{\pi}{4}}\}.$$

Notez qu'on peut aussi écrire : $z^4 + 1 = (z^2 + 1) - (\sqrt{2}\,z)^2 = (z^2 - \sqrt{2}\,z + 1)\,(z^2 + \sqrt{2}\,z + 1)$.

3.4.2.2 Racines n-ièmes d'un complexe

Le problème qui va nous intéresser est le suivant : étant donné $n \in \mathbb{N}^*$, résoudre l'équation :

$$z^n = 1.$$

Les solutions complexes de cette équation s'appellent *racines n-ième de l'unité.* Calculons-les. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé :

1. *Si $z^n = 1$, alors $z \in \mathbb{U}$.* En effet, $z \neq 0$, il possède un argument noté θ. On a alors :

$$z^n = \left(|z|\,e^{i\,\theta}\right)^n = |z|^n\,e^{i\,n\,\theta} = 1.$$

En prenant les modules, on obtient :

$$|z|^n = 1, \text{ or } |z| > 0 \text{ donc } |z| = 1.$$

2. *Il y a exactement n racines n-ième de l'unité.* En effet, si z est solution de $z^n = 1$, alors on a :

$$n\,\theta = 0 \mod [2\,\pi], \text{ soit } \exists k \in \mathbb{Z},\ \theta = \frac{2\,k\,\pi}{n}.$$

Donc, par $2\,\pi$-périodicité, les solutions :

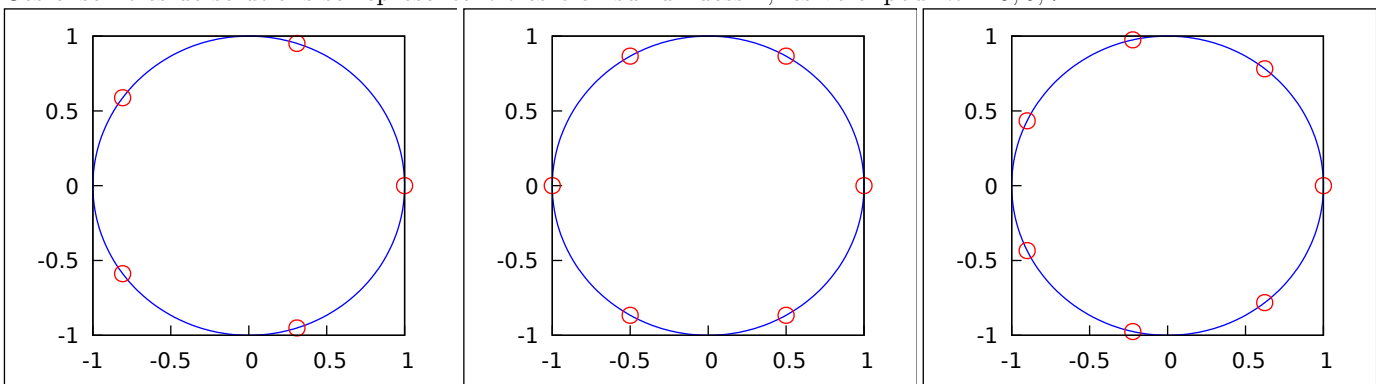
$$\forall k \in [\![0, n-1]\!]\,,\ z_k = \exp\left(i\,\frac{2\,k\,\pi}{n}\right).$$

3. On note l'ensemble de ces solutions :

$$\boxed{\mathbb{U}_n = \left\{\exp\left(i\,\frac{2\,k\,\pi}{n}\right),\ k \in [\![0, n-1]\!]\right\}},$$

c'est l'ensemble des racines n-ième de l'unité cherché.

Ces ensembles de solutions se représentent très bien sur un dessin, les voici pour $n = 5, 6, 7$:



Exemple(s) 36 :

36.1 $\mathbb{U}_1 = \{1\}$, $\mathbb{U}_2 = \{1, -1\}$, $\mathbb{U}_3 = \{1, j, j^2\}$ et $\mathbb{U}_4 = \{1, i, -1, -i\}$.

36.2 Résolvons l'équation :

$$\left(\frac{2\,z+1}{z-1}\right)^4 = 1$$

L'expression apparaissant est définie pour $z \neq 1$ donc l'ensemble de définition est $\mathbb{C} \setminus \{1\}$. Le complexe

$$Z = \frac{2\,z+1}{z-1}$$

est une racine quatrième de l'unité. On a donc :

$$Z = 1 \quad \text{ou} \quad Z = i \quad \text{ou} \quad Z = -1 \quad \text{ou} \quad Z = -i,$$

c'est-à-dire :

$$\mathcal{S} = \left\{-2, \frac{-1-3\,i}{5}, 0, \frac{-1+3\,i}{5}\right\}.$$

Cherchons maintenant les solutions de l'équation :

$$z^n = a, \text{ où } a = |a|\,e^{i\,\theta} \in \mathbb{C}^*,\ n \in \mathbb{N}^*.$$

Une solution particulière est le complexe :

$$\boxed{z_0 = |a|^{\frac{1}{n}}\,e^{i\,\frac{\theta}{n}}}.$$

Mais alors $(z/z_0)^n = 1$ donc $z/z_0 \in \mathbb{U}_n$. Les solutions de l'équation sont donc : :

$$\boxed{\{z_0\,u, \quad u \in \mathbb{U}_n\} = \left\{|a|^{\frac{1}{n}}\,\exp\left(i\,\frac{\theta+2\,k\,\pi}{n}\right),\ k \in [\![0, n-1]\!]\right\}}.$$

Exemple(s) 37 :

37.1 Résolvons l'équation :

$$z^3 = i.$$

On remarque que $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$. On a donc :

$$\mathcal{S} = \left\{ \exp\left(i \left(\frac{\pi}{6} + k\,\frac{2\,\pi}{3} \right) \right), \quad k \in [\![0, 2]\!] \right\} = \{ e^{i\frac{\pi}{6}}, e^{i\frac{5\,\pi}{6}}, e^{i\frac{9\,\pi}{6}} \}.$$

Il est ici possible d'exprimer ces trois complexes sous forme algébrique :

$$S = \left\{ \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\,i, -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\,i, -i \right\}.$$

37.2 Résolvons l'équation :

$$z^5 + 1 = 0.$$

L'équation que l'on cherche à résoudre équivaut à :

$$z^5 = -1 = e^{i\,\pi}$$

une solution particulière est donc : $z_0 = e^{i\,\pi/5}$ puis l'ensemble des solutions :

$$\mathcal{S} = \left\{ e^{i\,\pi/5}, e^{3\,i\,\pi/5}, -1, e^{7\,i\,\pi/5}, e^{9\,i\,\pi/5} \right\}.$$

3.5 Quelques fonctions complexes à valeurs complexes

3.5.1 Exponentielle complexe

Définition 3.5.15 : *(Exponentielle complexe.) Soit $z = a + b\,i$ un nombre complexe. On appelle exponentielle du complexe z et on note e^z ou $\exp(z)$ le complexe :*

$$e^z \overset{Def.}{=} e^a\, e^{i\,b}.$$

Propriété(s) 3.5.15 : Soit z et z' deux nombres complexes. Alors :

1. $e^z\, e^{z'} = e^{z+z'}$
2. $|e^z| = e^{\text{Ré}(z)} \neq 0$ et $\frac{1}{e^z} = e^{-z}$
3. $e^z = e^{z'}$ si et seulement si $\text{Re}(z) = \text{Re}(z')$ et $\text{Im}(z) \equiv \text{Im}(z') \quad [2\,\pi]$.

Démonstration :

1. Écrivons $z = a + i\,b$ et $z' = a' + i\,b'$. Alors :
   (a) Par l'exponentielle réelle $e^a \times e^{a'} = e^{a+a'}$,
   (b) et par les formules de trigonométrie $e^{i\,b} \times e^{i\,b'} = e^{i\,(b+b')}$.
   Donc :
   $$e^z \times e^{z'} = e^a \times e^{a'} \times e^{i\,b} \times e^{i\,b'} = e^{a+a'} \times e^{i\,(b+b')} = e^{z+z'}$$
2. On a $e^z = e^{\text{Ré}(z)}\, e^{i\,\text{Im}(z)}$ donc le module du complexe e^z est $\exp(\text{Re}(z))$ et un argument $\text{Im}(z)$. De plus, par la premier point $e^z\, e^{-z} = 1$ donc $1/e^z = e^{-z}$.

3. La propriété est une simple réécriture du fait que deux complexes non nuls sont égaux si et seulement si leurs modules sont les mêmes et leurs arguments sont congruents modulo $2\,\pi$.

■

Exemple(s) 38 :

38.1 Résolvons l'équation $e^z = 3\,i$. Pour ceci, on commence en écrivant :

$$3\,i = \exp\left(\ln(3) + i\,\frac{\pi}{2}\right).$$

Les solutions sont donc les complexes s'écrivant :

$$z = \ln(3) + i\,\left(\frac{\pi}{2} + 2\,k\,\pi\right), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

3.5.2 Transformations du plan

Propriété(s) 3.5.16 : Soit M un point d'affixe z.Alors :

1. Si $\vec{u}$ a pour affixe u, alors $\boxed{t(z) = z + u}$ est l'image de M par la translation de vecteur $\vec{u}$.
2. Si $k \in \mathbb{R}^*$, $\boxed{h(z) = k\,z}$ est l'affixe de l'image de M par l'homothétie de centre O et de rapport k.
3. Si $\theta \in \mathbb{R}$, $\boxed{r(z) = e^{i\,\theta}\,z}$ est l'affixe de l'image de M par la rotation de centre O et d'angle θ.

Remarque(s) 31 :

1. Rappelons que si A et B sont d'affixes respectives z_A et z_B, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $z_B - z_A$. C'est souvent pour un tel vecteur que l'on utilisera la propriété précédente.
2. Allons un peu plus loin. Si C est un point différent de A d'affixe z_C, alors le complexe :

$$\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$$

admet pour argument l'angle orienté entre les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$. En particulier :

$$\boxed{A, B, C \text{ alignés} \Leftrightarrow \frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} \in \mathbb{R} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} \in i\,\mathbb{R}}$$

Exemple(s) 39 :

39.1 Cherchons les complexes z tels que 1, z et z^2 sont alignés. Le complexe d'affixe $z = 1$ est clairement solution. Sinon, un tel complexe vérifie :

$$\overline{\left(\frac{1 - z^2}{1 - z}\right)} = \frac{1 - z^2}{1 - z} \Longleftrightarrow 1 + \bar{z} = 1 + z \Longleftrightarrow z \in \mathbb{R}.$$

39.2 Cherchons les complexes z non nuls tels que si δ et $-\delta$ sont les racines carrées de z, le triangle formé par ces trois points est rectangle en z. Clairement, $z = \pm 1$ convient. Sinon, $z \neq \delta$ et on peut traduire cette condition par :

$$\overline{\left(\frac{z + \delta}{z - \delta}\right)} = -\frac{z + \delta}{z - \delta} \Longleftrightarrow \frac{\bar{\delta} + 1}{\bar{\delta} - 1} = \frac{\delta + 1}{\delta - 1} \Longleftrightarrow |z| = 1.$$

Il s'agit donc du cercle unité.

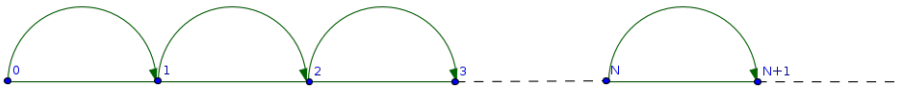
Chapitre 4

Sommes et produits :

4.1 Récurrence simple

Le raisonnement par récurrence simple est basé sur le principe suivant. Considérons une proposition $P(n)$ dont on veut montrer la véracité pour tout entier naturel n. Alors il suffit de :

1. La montrer pour $n = 0$ (on parle *d'initialisation* de la récurrence) (notez qu'on pourrait aussi commencer en un entier k quelconque mais qu'alors la propriété ne serait prouvée que pour $n \geqslant k$)
2. De montrer que si pour un entier naturel N, $P(N)$ est vraie, alors $P(N+1)$ aussi (on parle *d'hérédité* de la récurrence)



Exemple(s) 40 :

40.1 Une suite arithmétique de raison $r \in \mathbb{R}$ et de terme initial $a \in \mathbb{R}$ est définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n + r \quad \text{et} \quad u_0 = a.$$

Montrons que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = n\,r + a.}$$

Démonstration :

(a) *Initialisation :* On a $u_0 = a$ et $0\,r + a = a$.

(b) *Hérédité :* Soit $N \in \mathbb{N}$ fixé. On suppose que $u_N = N\,r + a$ (Hypothèse de récurrence (H.R.)). Alors :

$$u_{N+1} = u_N + r \underbrace{=}_{\text{H.R.}} a + N\,r + r = a + (N+1)\,r$$

l'hérédité est vérifiée et la formule donc vraie pour tout entier naturel n.

■

40.2 Une suite géométrique de raison $q \in \mathbb{R}$ et de terme initial $a \in \mathbb{R}$ est définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = q\,u_n \quad \text{et} \quad u_0 = a.$$

Montrons que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = a\,q^n.}$$

Démonstration :

(a) *Initialisation :* On a $u_0 = a$ et $a\,q^0 = a$.

(b) *Hérédité :* Soit $N \in \mathbb{N}$ fixé. On suppose que $u_N = a\,q^N$. Alors :

$$u_{N+1} = q\,u_N \underbrace{=}_{\text{H.R.}} q\,a\,q^N = a\,q^{N+1}$$

l'hérédité est vérifiée et la formule donc vraie pour tout entier naturel n.

■

40.3 Montrons que (inégalité de Bernoulli) :

$$\forall x \geqslant -1, \forall n \in \mathbb{N}, \quad (1+x)^n \geqslant 1 + n\,x.$$

Pour ceci, on pose :

$$\mathcal{P}(n) : \ \forall x \geqslant -1, \quad (1+x)^n \geqslant 1 + n\,x.$$

(a) *Initialisation :* prenons $n = 0$. Alors, pour $x \geqslant -1$:

$$(1+x)^0 = 1 \geqslant 1 = 1 + 0 \times x.$$

(b) *Hérédité :* supposons, pour N un entier naturel fixé, que $\mathcal{P}(N)$ est vraie et montrons $\mathcal{P}(N+1)$. Soit x un réel plus grand que -1. On a :

$$(1+x)^N \geqslant 1 + N \times x \text{ (hypothèse de récurrence)} \quad \text{et} \quad 1 + x \geqslant 0 \ (x \geqslant -1).$$

Ceci nous donne, en multipliant la première inégalité par le réel positif $1 + x$:

$$(1+x)^{N+1} \geqslant (1 + N\,x) \times (1+x) = 1 + (N+1)\,x + N\,x^2 \geqslant 1 + (N+1)\,x \quad (x^2 \geqslant 0).$$

Concluons : par principe de récurrence, la propriété est donc vraie pour tout n ; donc :

$$\forall x \geqslant -1, \forall n \in \mathbb{N}, \quad (1+x)^n \geqslant 1 + n\,x.$$

40.4 Il est possible d'initialiser une récurrence pour un entier différent de 0 ; par exemple, montrons que toute somme supérieure à 12 peut être payée seulement avec des pièces de 4 et de 5 :

$$\forall n \geqslant 12, \exists (a,b) \in \mathbb{N}^2, \quad 12 = 4\,a + 5\,b$$

(a) *Initialisation :* prenons $n = 12$. Alors $12 = 4 \times 3$.

(b) *Hérédité :* supposons, pour N un entier naturel fixé supérieur à 12, la propriété soit vraie, c'est-à-dire qu'il existe deux entiers naturels a et b tels que :

$$N = 4\,a + 5\,b$$

Il y a alors deux cas :

i. Si $a \neq 0$ alors :

$$N + 1 = 4\,(a-1) + 5\,(b+1)$$

ii. Si $a = 0$ alors, comme $N \geqslant 12$, $b \geqslant 3$ donc :

$$N + 1 = 5\,b + 1 = 5\,(b-3) + 4\,4$$

Concluons : par principe de récurrence, le propriété est donc vraie pour tout $n \geqslant 12$.

4.2 Définition, premiers exemples

Définition 4.2.16 : *Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels ou de complexes. On définit, pour tout entier n :*

$$\sum_{k=0}^{n} x_k \quad \text{et} \quad \prod_{k=0}^{n} x_k$$

par les formules de récurrence :

$$\sum_{k=0}^{0} x_k = x_0, \quad \sum_{k=0}^{n+1} x_k = \sum_{k=0}^{n} x_k + x_{n+1} \quad \text{et} \quad \prod_{k=0}^{0} x_k = x_0, \quad \prod_{k=0}^{n+1} x_k = \left(\prod_{k=0}^{n} x_k\right) \times x_{n+1}.$$

Remarque(s) 32 : 1. Il est parfois aisé, pour bien se représenter les sommes et les produits, de noter :

$$\sum_{k=0}^{n} x_k = x_0 + x_1 + \cdots + x_n \quad \text{et} \quad \prod_{k=0}^{n} x_k = x_0 \times x_1 \times \cdots \times x_n.$$

Cette notation, bien qu'un peu dangereuse, permet souvent de retrouver des formules pour travailler avec les sommes et les produits. La première, quand à elle est utile pour travailler par récurrence.

2. Soit I un ensemble fini non vide à n éléments. Numérotons ses éléments par les entiers compris entre 0 et $n-1$, c'est-à-dire :

$$I = \{i_0, i_1, \ldots, i_{n-1}\}.$$

Alors on définit, pour $(x_i)_{i\in I}$ une famille de réels ou de complexes indexés par I

$$\sum_{i\in I} x_i = \sum_{k=0}^{n-1} x_{i_k}, \quad \text{et} \quad \prod_{i\in I} x_i = \prod_{k=0}^{n-1} x_{i_k}.$$

Notez que cette définition ne dépend pas de l'ordre employé dans la numérotation de I.

3. Si $I = [\![k, k+n]\!]$, où $k \leqslant n$ sont deux entiers naturels, on note :

$$\sum_{i=k}^{n} x_i \overset{Not.}{=} \sum_{i\in[\![k,n]\!]} x_i$$

Traitons quelques exemples :

Exemple(s) 41 :

41.1 On a :

$$\sum_{k=0}^{n} 1 = \underbrace{1+1+\cdots+1}_{n+1 \text{ fois}} = n+1 \quad \text{et} \quad \prod_{k=0}^{n} 1 = 1\times 1\times\cdots\times 1 = 1.$$

41.2 On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\boxed{n! = \prod_{k=1}^{n} k \quad \text{et} \quad 0! = 1.}$$

En particulier : $6! = 6\times 5\times 4\times 3\times 2\times 1 = 720$.

41.3 On a :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n\times(n+1)}{2}.}$$

Démonstration : Notons S cette somme. Alors :

$$\begin{array}{rccccccccccc} & S & = & 1 & + & 2 & + & \cdots & + & n-1 & + & n \\ + & S & = & n & + & n-1 & + & \cdots & + & 2 & + & 1 \\ \hline & 2\,S & = & n+1 & + & n+1 & + & \cdots & + & n+1 & + & n+1 \end{array}$$

Donc $2\,S = n \times (n+1)$ puis $S = \frac{n\times(n+1)}{2}$.

■

41.4 On a :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n \times (n+1) \times (2\,n+1)}{6}.}$$

Démonstration : Montrons-le par récurrence sur n.

(a) *Initialisation* : si $n = 0$, les deux côtés de l'égalité sont égaux à 0.

(b) *Hérédité* : Supposons le résultat vrai pour $N \in \mathbb{N}$ fixé. Alors :

$$\sum_{k=0}^{N+1} k^2 = \sum_{k=0}^{N} k^2 + (N+1)^2 \underbrace{=}_{H.R.} \frac{N \times (N+1) \times (2\,N+1)}{6} + (N+1)^2 = (N+1) \times \frac{2\,N^2 + 7\,N + 6}{6}$$

Mais $(N+2) \times (2\,N+3) = 2\,N^2 + 7\,N + 6$ et la formule est donc aussi vraie au rang $N+1$

Par principe de récurrence, le formule est donc vraie pour tout entier naturel n.

■

Remarque(s) 33 : Voyons quelques opérations « autorisées » avec les sommes et les produits, que l'on retrouve facilement en développant avec des pointillés. Soit $k \leqslant n$ et λ une constante complexe On a :

1. Pour les sommes :

$$\sum_{i=k}^{m}(a_i + b_i) = \sum_{i=k}^{m} a_i + \sum_{i=k}^{m} b_i \quad \text{et} \quad \sum_{i=k}^{m} \lambda \times a_i = \lambda \times \sum_{i=k}^{m} a_i.$$

2. Pour les produits (quand ceci a du sens pour le quotient) :

$$\prod_{i=k}^{m} a_i \times b_i = \prod_{i=k}^{m} a_i \times \prod_{i=k}^{m} b_i \quad \text{et} \quad \prod_{i=k}^{m} a_i/b_i = \left(\prod_{i=k}^{m} a_i\right) / \left(\prod_{i=k}^{m} b_i\right).$$

Exemple(s) 42 :

42.1 Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison r, alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = u_0 + r \times n.$$

Donc :

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n}(u_0 + r \times k) = \sum_{k=0}^{n} u_0 + r \times \sum_{k=0}^{n} k = (n+1) \times u_0 + r \times \frac{n \times (n+1)}{2}$$

Mais $r \times n = u_n - u_0$ d'où :

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \frac{n+1}{2} \times (u_n + u_0).$$

4.3 Quelques techniques de calcul

Propriété(s) 4.3.17 : (Relation de Chasles) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite et $p<q$ deux entiers naturels. Alors :

$$\sum_{k=0}^{q} u_k = \sum_{k=0}^{p} u_k + \sum_{k=p+1}^{q} u_k \quad \text{et} \quad \prod_{k=0}^{q} u_k = \prod_{k=0}^{p} u_k \times \prod_{k=p+1}^{q} u_k.$$

Exemple(s) 43 :

43.1 Soit $2 \leqslant p < q$ deux entiers naturels. On a :

$$\prod_{k=p}^{q} k = \left(\prod_{k=1}^{q} k\right) / \left(\prod_{k=1}^{p-1} k\right) = \frac{q!}{(p-1)!}.$$

43.2 Soit $1 \leqslant p < q$ deux entiers naturels. Alors :

$$\sum_{k=p}^{q} k = \sum_{k=0}^{q} k - \sum_{k=0}^{p-1} k = \frac{q\times(q+1)}{2} - \frac{p\times(p-1)}{2} = \frac{(q-p+1)\times(q+p)}{2}.$$

Propriété(s) 4.3.18 : (Changements d'indice) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite et $p<q$ deux entiers naturels. Alors :

1. On peut effectuer le décalage : $\boxed{i=k-p}$: $\displaystyle\sum_{k=p}^{q} u_k = \sum_{i=0}^{q-p} u_{i+p}$.
2. On peut effectuer la symétrisation $\boxed{i=q-k}$: $\displaystyle\sum_{k=0}^{q} u_k = \sum_{i=0}^{q} u_{q-i}$.

Remarque(s) 34 : Bien entendu, ces formules restent valables pour des produits.

Exemple(s) 44 :

44.1 Soit $a\in\mathbb{C}$, $a\neq 1$. Alors :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}.}$$

Démonstration : On a :

$$(1-a)\times\sum_{k=0}^{n} a^k = \sum_{k=0}^{n} a^k - \sum_{k=0}^{n} a^{k+1} = \sum_{k=0}^{n} a^k - \sum_{k=1}^{n+1} a^k = a^0 - a^{n+1} = 1-a^{n+1}.$$

■

44.2 Supposons maintenant que $m\leqslant n$. Alors :

$$\boxed{\sum_{k=m}^{n} a^k = \frac{a^{n+1}-a^m}{a-1}.}$$

Démonstration : Par la relation de Chasles, on a :

$$\sum_{k=m}^{n} a^k = \sum_{k=0}^{n} a^k - \sum_{k=0}^{m-1} a^k = \frac{a^{n+1}-1}{a-1} - \frac{a^m-1}{a-1} = \frac{a^{n+1}-a^m}{a-1}.$$

■

44.3 Une utilisation classique d'un décalage est le calcul :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} k\,2^k \underbrace{=}_{i=k-1} \sum_{i=0}^{n-1}(i+1)\,2^{i+1} = 2\left(\sum_{i=0}^{n-1} i\,2^i + \sum_{i=0}^{n-1} 2^i\right) = 2\,(S_n - n\,2^n + 2^n - 1).$$

Donc $S_n = (n-1)\,2^{n+1} + 2$.

44.4 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a,b) \in \mathbb{C}^2$. On a (formule de Bernoulli) :

$$\boxed{a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k\,b^{n-1-k}.}$$

En effet :

$$(a-b)\times\sum_{k=0}^{n-1} a^k\,b^{n-1-k} = \sum_{k=0}^{n-1} a^{k+1}\,b^{n-1-k} - \sum_{k=0}^{n-1} a^k\,b^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} a^k\,b^{n-k} - \sum_{k=0}^{n-1} a^k\,b^{n-k} = a^n - b^n.$$

44.5 On a :

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{n+1-k}\right) = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+1-k} \underbrace{=}_{i=n+1-k} \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i} = 0.$$

Propriété(s) 4.3.19 : (sommes et produits télescopiques) Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite, alors :

$$\sum_{k=0}^{n}(v_{k+1} - v_k) = v_{n+1} - v_0.$$

et si, de plus, le suite est constituée de complexes non nuls :

$$\prod_{k=0}^{n}\frac{v_{k+1}}{v_k} = \frac{v_{n+1}}{v_0}.$$

Exemple(s) 45 :

45.1 Considérons la somme :

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k\times(k+1)} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

45.2 Calculons le produit :

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right) = \prod_{k=1}^{n}\frac{k+1}{k} = n+1.$$

4.4 Formule du binôme de Newton

Les coefficients binomiaux sont définis par, pour $p \leqslant n$ deux entiers naturels :

$$\boxed{\binom{n}{p} = \frac{n!}{p! \times (n-p)!}.}$$

Exemple(s) 46 :

46.1 On a :

$$\boxed{\binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1 \qquad \text{et} \qquad \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n.}$$

46.2 De plus :

$$\binom{n}{2} = \frac{n \times (n-1)}{2}.$$

Si $p > n$, on dira que $\binom{n}{p} = 0$. Retenir la formule de définition est très importante, mais il existe une méthode pour calculer ces coefficients : le *triangle de Pascal*, dont la justification est donnée par la formule éponyme, pour k et n des entiers strictement positifs (faites le calcul !) :

$$\boxed{\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.}$$

cette formule, couplée aux cas particuliers $\binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1$ permet de calculer les coefficients binomiaux ligne par ligne (et c'est exactement ce dont on aura besoin pour la formule du binôme de Newton) :

$n \backslash k$	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$
$n=0$	1	0	0	0	0	0
$n=1$	1	1	0	0	0	0
$n=2$	1	2	1	0	0	0
$n=3$	1	3	3	1	0	0
$n=4$	1	4	6	4	1	0
$n=5$	1	5	10	10	5	1

Théorème 4.4.4 (Formule du binôme de Newton) : *Soit $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ et $n \in \mathbb{N}$. Alors :*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k \times b^{n-k}.$$

Démonstration : Soit $(a,b) \in \mathbb{C}^2$. Montrons la formule par récurrence sur n.

1. *initialisation* : si $n = 0$, on a :

$$(a+b)^0 = 1 \quad \sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} a^k \times b^{0-k} = \binom{0}{0} a^0 \times b^{0-0} = 1.$$

2. *hérédité* : supposons que, pour N un entier naturel fixé :

$$(a+b)^N = \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} a^k \times b^{N-k}.$$

Alors :

$$(a+b)^{N+1} = (a+b) \times \left(\sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} a^k \times b^{N-k} \right) = \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} a^{k+1} \times b^{N-k} + \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} a^k \times b^{N+1-k}.$$

Donc, en effectuant le changement de variables $k' = k+1$ dans la première somme :

$$(a+b)^{N+1} = \sum_{k'=1}^{N+1} \binom{N}{k'-1} a^{k'} \times b^{N+1-k'} + \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} a^k \times b^{N+1-k}$$

$$= a^{N+1} + b^{N+1} + \sum_{k=0}^{N} \left(\binom{N}{k} + \binom{N}{k-1} \right) a^k \times b^{N+1-k}.$$

Il suffit alors d'utiliser la formule du triangle de Pascal pour conclure.

■

Exemple(s) 47 :

47.1 Il est bon de se souvenir de certains cas particuliers. Par exemple :

$$(a+b)^3 = 1\,a^3 + 3\,a^2 \times b + 3\,a \times b^2 + 1\,b^3.$$

47.2 La formule du binôme de Newton nous donne également des informations sur les lignes du triangle de Pascal :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n \qquad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k = 0.$$

47.3 Enfin, le calcul de certaines sommes se ramène parfois à utiliser la formule du binôme. Par exemple :

$$\sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} n \binom{n-1}{k-1} = n \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} = n\,2^{n-1}.$$

4.5 Sommes et fonctions trigonométriques

1. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$. La **formule de Moivre** :

$$\cos(n\,\theta) + \sin(n\,\theta)\,i = e^{i\,n\,\theta} = (\cos(\theta) + \sin(\theta)\,i)^n$$

permet, en développant l'expression de droite grâce au binôme de Newton, d'exprimer $\cos(n\,\theta)$ et $\sin(n\,\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$.

Exemple(s) 48 :

48.1 On a :

$$(\cos(\theta) + \sin(\theta)\,i)^5 =$$
$$\cos^5(\theta) + 5\,i\,\cos^4(\theta)\,\sin(\theta) - 10\,\cos^3(\theta)\,\sin^2(\theta) - 10\,i\,\cos^2(\theta)\,\sin^3(\theta) + 5\,\cos(\theta)\,\sin^4(\theta) + i\,\sin^5(\theta)$$

Donc :

$$\begin{cases} \cos(5\,\theta) = \cos^5(\theta) - 10\,\cos^3(\theta)\,\sin^2(\theta) + 5\,\cos(\theta)\,\sin^4(\theta) \\ \sin(5\,\theta) = 5\,\cos^4(\theta)\,\sin(\theta) - 10\,\cos^2(\theta)\,\sin^3(\theta) + \sin^5(\theta). \end{cases}$$

48.2 Déduisons-en une formule pour $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$. On a, grâce à la formule $\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$:

$$\sin(5\,\theta) = 16\,\sin^5(\theta) - 20\,\sin^3(\theta) + 5\,\sin(\theta).$$

Donc, si l'on pose $x = \sin(\pi/5)$:

$$0 = 16\,x^5 - 20\,x^3 + 5\,x = x\,(16\,x^4 - 20\,x^2 + 5).$$

Donc comme $x \neq 0$, il s'agit de résoudre une équation bicarrée. On trouve :

$$x^2 = \frac{5+\sqrt{5}}{8} \quad \text{ou} \quad x^2 = \frac{5-\sqrt{5}}{8}.$$

Le premier cas est à exclure car $x^2 = \sin(\pi/5)^2 \leqslant \sin(\pi/4)^2 = 1/2$. Enfin, $x = \sin(\pi/5) \geqslant 0$ donc :

$$\sin\left(\frac{\pi}{5}\right) = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}.$$

Remarque(s) 35 : Remarquez que grâce à ces formules, il est toujours possible d'exprimer le $\cos(n\,\theta)$ uniquement à l'aide de cosinus et le sinus seulement à l'aide de sinus. Ce n'est pas toujours le cas pour la fonction sinus.

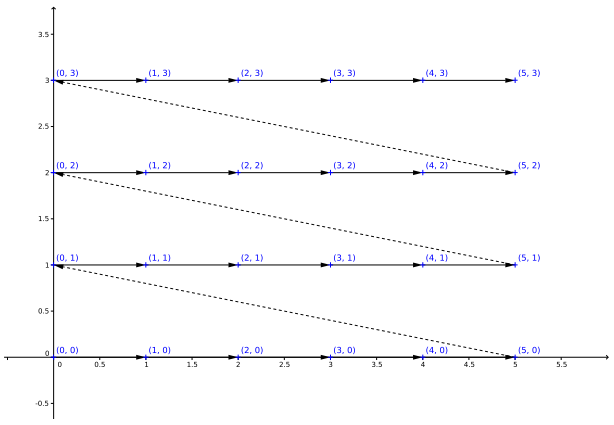
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :
$$\sum_{k=0}^{n} \cos\left(\frac{2\,k\,\pi}{n}\right) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{Re}(e^{\frac{2\,i\,k\,\pi}{n}}) = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n} (e^{\frac{2\,i\,\pi}{n}})^k\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{e^{i\,\pi}-1}{e^{\frac{2\,i\,\pi}{n}}-1}\right) = 0.$$

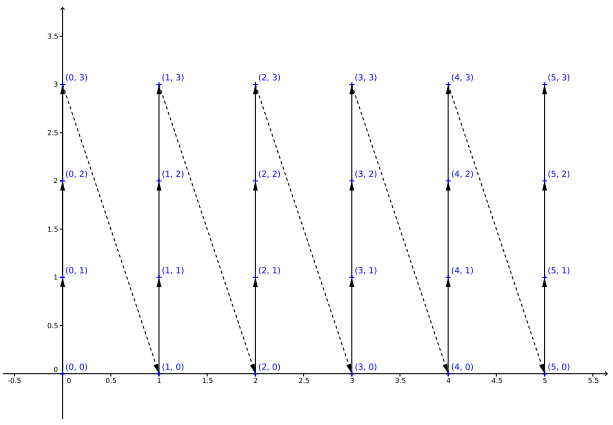
3. Soit $\theta \in]0, 2\,\pi[$. Alors :
$$\sum_{k=0}^{n} \cos(k\,\theta) = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n} (e^{i\,\theta})^k\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{e^{i\,(n+1)\,\theta}-1}{e^{i\,\theta}-1}\right).$$
Pour calculer cette partie réelle, on utilise maintenant la formule de l'arc-moitié :
$$\frac{e^{i\,(n+1)\,\theta}-1}{e^{i\,\theta}-1} = \frac{e^{i\,(n+1)\,\frac{\theta}{2}}}{e^{i\,\frac{\theta}{2}}}\,\frac{-2\,i\,\sin\left(\frac{n+1}{2}\,\theta\right)}{-2\,i\,\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} = e^{i\,n\,\frac{\theta}{2}}\,\frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\,\theta\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}.$$
On en déduit :
$$\sum_{k=0}^{n} \cos(k\,\theta) = \cos\left(n\,\frac{\theta}{2}\right)\,\frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\,\theta\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}.$$

4.6 Produit de deux sommes - sommes doubles

Dans ce paragraphe, nous allons étudier les sommes dites *doubles*. Le cas le plus simple est dit « rectangulaire » :
$$\sum_{\substack{0 \leqslant i \leqslant n \\ 0 \leqslant j \leqslant m}} a_{i,j}.$$

Il existe alors deux façons d'effectuer la somme, par lignes, ou par colonnes :





Ce qui donne, en utilisant ces deux numérotations : :
$$\boxed{\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} a_{i,j} = \sum_{\substack{0 \leqslant i \leqslant n \\ 0 \leqslant j \leqslant m}} a_{i,j} = \sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{m} a_{i,j}.}$$

Exemple(s) 49 :

49.1 On a :

$$\sum_{\substack{0\leqslant i\leqslant n\\0\leqslant j\leqslant m}}(i+j)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}(i+j)=\sum_{i=0}^{n}(m+1)\left(i+\frac{m}{2}\right)=\frac{(n+1)(m+1)(n+m)}{2}.$$

49.2 On a :

$$\sum_{\substack{0\leqslant i\leqslant n\\0\leqslant j\leqslant m}}i\,j=\left(\sum_{i=0}^{n}i\right)\left(\sum_{j=0}^{m}j\right)=\frac{n\,m\,(n+1)(m+1)}{4}.$$

Un autre type de sommes doubles que l'on rencontre souvent est dit « triangulaire » :

$$\sum_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n}a_{i,j}$$

On peut alors, comme pour le cas des sommes précédentes, procéder par lignes ou par colonnes :

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}a_{i,j}=\sum_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n}a_{i,j}=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=j}^{n}a_{i,j}.}$$

Exemple(s) 50 :

50.1 Parfois, intervertir une somme triangulaire facilite grandement les calculs :

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n}\frac{1}{j}=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j}\frac{1}{j}=\sum_{j=1}^{n}1=n.$$

50.2 Parfois, une somme triangulaire apparaît naturellement lors d'un calcul :

$$\sum_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq n}}\min(i,j)=\sum_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n}j+\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}i=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=j}^{n}j+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n}i$$

$$=\sum_{j=1}^{n}(n-j+1)\,j+\sum_{i=1}^{n}(n-i)\,i=(2\,n+1)\,\frac{n\,(n+1)}{2}-\frac{n\,(n+1)\,(2\,n+1)}{3}=\frac{n\,(n+1)\,(2\,n+1)}{6}.$$

Chapitre 5

Calculs de primitives :

5.1 Définition, premiers exemples

Définition 5.1.17 : *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). On appelle primitive de f une fonction $F : I \to \mathbb{K}$ dérivable sur I telle que :*

$$\forall x \in I, \quad F'(x) = f(x).$$

Remarque(s) 36 :

1. Une fonction f n'admet jamais une seule primitive, en effet, si F est un primitive de f alors pour toute constante $k \in \mathbb{K}$, la fonction $F + k$ est aussi une primitive de f.
2. Réciproquement, si F et G sont deux primitives de f, alors $(F-G)' = 0$ donc comme I est un intervalle, il existe une constante k telle que : $F = G + k$ sur I.
3. Les deux précédentes remarques se résument à : si F est une primitive de f alors l'ensemble des primitives de f est :
$$\boxed{\{F + k, \quad k \in \mathbb{K}\}.}$$
4. Il est possible que certains énoncés demandent de trouver des primitives sur une réunion d'intervalles E ; dans ce cas, il s'agit de chercher une primitive sur chaque intervalle. Attention cependant ! Dans ce cas, l'ensemble des primitives est différent que si il s'agissait d'un intervalle ; par exemple, l'ensemble des primitives de $\frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$ est :
$$\left\{ x \mapsto \begin{cases} \ln(x) + k_1 & \text{si } x \in \mathbb{R}_+^* \\ \ln(-x) + k_2 & \text{si } x \in \mathbb{R}_-^* \end{cases}, \quad (k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

Exemple(s) 51 :

51.1 On a des primitives célèbres à bien connaître (F désigne *une* primitive de f sur chaque intervalle où la fonction f est définie) :

$f(x)$	$F(x)$
x^α $(\alpha \neq -1)$	$x^{\alpha+1}/(\alpha+1)$
$1/x$	$\ln(\lvert x \rvert)$

La première formule est fondamentale, elle contient de nombreuses primitives connues, par exemple, on peut en déduire que sur chaque intervalle de $\mathbb{R}^*$, si $n \neq 1$, une primitive de $f(x) = 1/x^n$ est :

$$F(x) = \frac{1}{1-n} \times \frac{1}{x^{n-1}}.$$

De même, sur $\mathbb{R}_+^*$, une primitive de la fonction $f(x) = \sqrt{x}$ est :

$$F(x) = \frac{2}{3} \times x^{3/2}.$$

51.2 Les même formules sont vraies avec un décalage : si a est une constante, *une* primitive de f sur chaque intervalle où la fonction f est définie est :

$f(x)$	$F(x)$
$(x+a)^\alpha$ $(\alpha \neq -1)$	$(x+a)^{\alpha+1}/(\alpha+1)$
$1/(x+a)$	$\ln(\lvert x+a\rvert)$

Propriété(s) 5.1.20 : Soit F une primitive de f et G une primitive de g sur un intervalle I et $k \in \mathbb{K}$. Alors :

1. $F+G$ est une primitive de $f+g$
2. $k \times F$ est une primitive de $k \times f$.

Exemple(s) 52 :

52.1 Une primitive sur chaque intervalle de $\mathbb{R}^*$ de la fonction :

$$f(x) = \frac{1}{x^7} - \frac{1}{x^5} + \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x}$$

est la fonction :

$$F(x) = -\frac{1}{6\,x^6} + \frac{1}{4\,x^4} - \frac{1}{2\,x^2} - \ln(|x|).$$

52.2 Considérons la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par :

$$g(x) = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{(x-1)^2}.$$

Alors une primitive de cette fonction est :

$$G(x) = -\ln(|x-1|) - \frac{1}{x-1}.$$

Nous pouvons rajouter à notre « catalogue » de fonctions dont nous connaissons les primitives les fonctions :

$f(x)$	$F(x)$
$e^{\lambda \times x}$ $(\lambda \in \mathbb{R}^*)$	$e^{\lambda \times x}/\lambda$
$\cos(\omega \times x)$ $(\omega \in \mathbb{R}^*)$	$\sin(\omega \times x)/\omega$
$\sin(\omega \times x)$ $(\omega \in \mathbb{R}^*)$	$-\cos(\omega \times x)/\omega$
$\mathrm{ch}(\omega \times x)$ $(\omega \in \mathbb{R}^*)$	$\mathrm{sh}(\omega \times x)/\omega$
$\mathrm{sh}(\omega \times x)$ $(\omega \in \mathbb{R}^*)$	$\mathrm{ch}(\omega \times x)/\omega$

Exemple(s) 53 :

53.1 La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = e^{2\,x} \times \mathrm{sh}(x) = \frac{e^{3\,x} - e^x}{2}$$

admet pour primitive :

$$F(x) = \frac{e^{3\,x}}{6} - \frac{e^x}{2}.$$

53.2 La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \cos^2(x) = \frac{\cos(2\,x) + 1}{2}$$

admet pour primitive la fonction :

$$G(x) = \frac{\sin(2\,x)}{4} + \frac{x}{2}.$$

5.2 Repérer des dérivées de fonctions composées

Cette méthode permet parfois de résoudre très facilement des exercices qui seraient sinon très techniques.

Propriété(s) 5.2.21 : Soit I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, $u : I \to J$ et $v : J \to \mathbb{R}$ deux fonction dérivables sur leur ensemble de définition. Alors une primitive de la fonction définie sur I par :

$$f(x) = u'(x) \times v'(u(x))$$

est la fonction définie sur I par :

$$F(x) = v(u(x)).$$

Exemple(s) 54 :

54.1 Une primitive de la fonction tangente :

$$f(x) = \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

est, sur tout intervalle de son ensemble de définition :

$$\boxed{F(x) = -\ln(|\cos(x)|).}$$

5.2.1 Polynômes de fonctions trigonométriques

Dans ce paragraphe, nous allons essentiellement utiliser la dérivée de fonctions composées :

$$\boxed{(u^\alpha)' = \alpha \times u' \times u^{\alpha-1}.}$$

Si l'on cherche une primitive d'une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos^i(x) \times \sin^j(x)$ alors, en utilisant la formule $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$:

1. si i est impair, on reconnaît la dérivée d'une fonction polynomiale en $\sin(x)$
2. si j est impair, on reconnaît la dérivée d'une fonction polynomiale en $\cos(x)$

Si les deux indices sont pairs, on linéarise.

Remarque(s) 37 : Bien entendu, cette méthode s'applique aussi dans le cas hyperbolique.

Exemple(s) 55 :

55.1 Une primitive de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \cos^3(x) \times \sin^2(x) = \cos(x) \times \sin^2(x) - \cos(x) \times \sin^4(x)$$

est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(x) = \frac{1}{3}(\sin(x))^3 - \frac{1}{5}(\sin(x))^5$.

55.2 Rappelons-nous que par linéarisation :

$$\cos(x)^4 = \frac{1}{8}(\cos(4\,x) + 4\,\cos(2\,x) + 3),$$

une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos(x)^4$ est donc :

$$F(x) = \frac{1}{32}\,\sin(4\,x) + \frac{1}{4}\,\sin(2\,x) + \frac{3}{8}\,x.$$

5.2.2 Utilisation de la fonction arctangente

Dans ce paragraphe, nous allons utiliser les dérivées de fonctions composées :

$$\boxed{\arctan(u)' = \frac{u'}{1+u^2} \quad \text{et} \quad \ln(|u|)' = \frac{u'}{u}}$$

Avec ces deux formules, nous allons pouvoir calculer les primitives des fonctions du type :

$$f(x) = \frac{\alpha\,x + \beta}{x^2 + a\,x + b}, \quad \text{avec} \quad \Delta = a^2 - 4\,b < 0.$$

1. Si $\alpha = 0$ et $\beta = 1$, on met le dénominateur sous la forme canonique :

$$x^2 + a\,x + b = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{4\,b - a^2}{4} = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}\right)^2$$

puis on utilise :[1]

$f(x)$	$F(x)$
$\frac{1}{x^2+q^2}$	$\frac{1}{q}\arctan\left(\frac{x}{q}\right)$
$\frac{1}{(x+p)^2+q^2}$	$\frac{1}{q}\arctan\left(\frac{x+p}{q}\right)$

Exemple(s) 56 :

56.1 Une primitive de :

$$f(x) = \frac{1}{x^2+4} = \frac{1}{x^2+2^2}$$

est la fonction :

$$F(x) = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x}{2}\right).$$

56.2 Une primitive de :

$$g(x) = \frac{1}{x^2+x+1} = \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

est la fonction :

$$G(x) = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2\,x+1}{\sqrt{3}}\right).$$

1. La première formule sert surtout à retrouver la deuxième...

2. Dans le cas général, on a (rappelons que $\Delta = a^2 - 4\,b < 0$) :

$f(x)$	$F(x)$
$\frac{2\,x+a}{x^2+a\,x+b}$	$\ln(x^2+a\,x+b)$

donc on écrit :

$$\frac{\alpha\,x+\beta}{x^2+a\,x+b} = \frac{\alpha}{2}\underbrace{\frac{2\,x+a}{x^2+a\,x+b}}_{\text{on utilise (2)}} + \left(\beta - \frac{a\times\alpha}{2}\right)\underbrace{\frac{1}{x^2+a\,x+b}}_{\text{on utilise (1)}}.$$

Exemple(s) 57 :

57.1 Une primitive de la fonction :

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2+1} = \frac{1}{2}\,\frac{2\,x}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1}$$

est la fonction

$$F(x) = \frac{1}{2}\,\ln(x^2+1) + \arctan(x).$$

57.2 Une primitive de la fonction :

$$g(x) = \frac{x+1}{x^2+x+1} = \frac{1}{2}\,\frac{2\,x+1}{x^2+x+1} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{x^2+x+1}$$

est la fonction :

$$G(x) = \frac{1}{2}\,\ln(x^2+x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\,\arctan\left(\frac{2\,x+1}{\sqrt{3}}\right).$$

5.2.3 Décomposition en éléments simples

Les méthodes précédentes permettent de trouver des primitives de nombreuses autres fonctions grâce à la décomposition en éléments simples. Voyons comment l'utiliser sur des exemples. [2]

Exemple(s) 58 :

58.1 La décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle :

$$q(x) = \frac{1}{x\,(x-1)^2} \quad \text{s'écrit} \quad q(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{(x-1)^2}.$$

On trouve :

$$q(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}.$$

Donc une primitive de q est la fonction :

$$Q(x) = \ln(|x|) - \ln(|x-1|) - \frac{1}{x-1}.$$

58.2 La décomposition en éléments simples de la fonction rationnelle :

$$r(x) = \frac{2\,x}{(1+x^2)\,(1+x)^2} \quad \text{s'écrit} \quad r(x) = \frac{a}{1+x} + \frac{b}{(1+x)^2} + \frac{c\,x+d}{1+x^2}.$$

On trouve :

$$r(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{(1+x)^2}.$$

Donc une primitive de la fonction r est la fonction :

$$R(x) = \arctan(x) + \frac{1}{1+x}.$$

2. Les deux exemples suivants sont issus du concours *ENAC* 2017

Un cas particulier important est celui des fonctions du type :

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + a\,x + b}$$

où le discriminant du dénominateur est positif ou nul. Il s'agit alors d'écrire :

$$x^2 + a\,x + b = (x - x_1) \times (x - x_2)$$

avec x_1 et x_2 les deux solutions de l'équation $x^2 + a\,x + b = 0$, puis d'utiliser éventuellement la décomposition en éléments simples.

Exemple(s) 59 :

59.1 Une primitive de la fonction :

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 3\,x + 2} = \frac{1}{(x-1) \times (x-2)} = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1}$$

est la fonction :

$$F(x) = \ln(|x-2|) - \ln(|x-1|).$$

59.2 Il faut faire bien attention à se ramener à ce qu'on sait faire s'il y a une constante au numérateur ou devant le x^2 au dénominateur :

$$g(x) = \frac{2}{3\,x^2 + 6\,x + 3} = \frac{2}{3}\,\frac{1}{x^2 + 2\,x + 1} = \frac{2}{3}\,\frac{1}{(x+1)^2}.$$

La fonction g admet donc pour primitive le fonction :

$$G(x) = -\frac{2}{3}\,\frac{1}{x+1}.$$

5.3 Méthodes intégrales

5.3.1 Notation intégrale

Dans la suite du paragraphe, on admettra (temporairement) que, sur un intervalle I, **toute fonction continue admet une primitive**.

Définition 5.3.18 : *Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Pour tour $c \in I$, on note pour tout x de l'intervalle I :*

$$F(x) = \int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

l'unique primitive de f qui s'annule en c.

Remarque(s) 38 :

1. Nous verrons dans un paragraphe futur que (ce qui est très loin d'être évident) cette notation est reliée à un calcul d'aire ; plus précisément, la quantité : $\int_c^d f(t)\,\mathrm{d}t$ désigne, si $c \leqslant d$ sont deux réels de l'intervalle I l'aire (orientée) comprise entre l'axe O_x et la courbe de f.
2. Une telle primitive est bien-sûr dérivable, mais il y a plus, comme f est continue, sa dérivée est continue. On appelle une telle fonction une **fonction de classe $\mathcal{C}^1$.**
3. Le réel c importe peu si l'on cherche à calculer **une** primitive : changer c en un autre réel de l'intervalle revient à ajouter une constante à la primitive que nous sommes en train de calculer.

4. Si a et b sont deux réels d'un intervalle I et F est un primitive quelconque de f alors ;

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = [F(t)]_{t=a}^{t=b} = F(b) - F(a).$$

Propriété(s) 5.3.22 : Soit f et g deux fonctions continues sur l'intervalle I et k une constante, a, b et c trois éléments de I. Alors :

$$\int_a^b (f(t)+g(t))\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \int_a^b k\times f(t)\,\mathrm{d}t = k\times\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

On a de plus la *relation de Chasles* :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Démonstration : Il suffit à chaque fois d'utiliser une primitive des fonctions qui apparaissent. Montrons par exemple la relation de Chasles. Si F est une primitive de f, on a :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b)-F(a) = F(b)-F(c)+F(c)-F(a) = \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t.$$

■

5.3.2 Intégration par parties

Proposition 5.3.6 : *Soit u et v deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I. Alors, pour tous réels a et b de l'intervalle I :*

$$\int_a^b u'(t)\,v(t)\,\mathrm{d}t = [u(t)\,v(t)]_{t=a}^{t=b} - \int_a^b u(t)\,v'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Démonstration : Il s'agit d'une application directe de la formule $u'\times v = (u\times v)' - u\times v'$.

■

Exemple(s) 60 :

60.1 Calculons une primitive de la fonction logarithme par intégration par parties :

$$\int_c^x \ln(t)\,\mathrm{d}t = [t\,\ln(t)]_{t=c}^{t=x} - \int_c^x 1\,\mathrm{d}t = x\,\ln(x) - x + C.$$

une primitive de la fonction logarithme est donc la fonction :

$$\boxed{F(x) = x\,\ln(x) - x.}$$

60.2 Calculons une primitive de la fonction arc-tangente par intégration par parties :

$$\int_c^x \arctan(t)\,\mathrm{d}t = [t\,\arctan(t)]_{t=c}^{t=x} - \int_c^x \frac{t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = x\,\arctan(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C.$$

Une primitive de la fonction arctangente est donc la fonction :

$$G(x) = x\,\arctan(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2).$$

60.3 Il est possible de faire plusieurs intégrations par parties de suite ; par exemple, si l'on cherche à calculer une primitive de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2\,e^x$:

$$\int_c^x t^2\,e^t\,\mathrm{d}t = \left[t^2\,e^t\right]_{t=c}^{t=x} - \int_c^x 2\,t\,e^t\,\mathrm{d}t = \left[t^2\,e^t\right]_{t=c}^{t=x} - \left[2\,t\,e^t\right]_{t=c}^{t=x} + \int_c^x 2\,e^t\,\mathrm{d}t = (x^2 - 2\,x + 2)\,e^x + C.$$

60.4 On peut se servir d'une intégration par parties pour trouver une équation qui permet de calculer une intégrale. Par exemple :

$$I = \int_0^1 \frac{\arctan(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \left[\arctan^2(t)\right]_{t=0}^{t=1} - \int_0^1 \frac{\arctan(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi^2}{16} - I.$$

Et l'on peut donc conclure : $I = \frac{\pi^2}{32}$.

5.3.3 Changements de variables

Théorème 5.3.5 (changement de variables) : *Soit I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, f une fonction continue sur J et $\varphi : I \to J$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. On a, pour tous a et b éléments de I :*

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Démonstration : Soit F une primitive de f alors la fonction G définie sur I par :

$$G(t) = F(\varphi(t))$$

est une primitive de $f \circ \varphi\,\varphi'$ car elle est dérivable et par la formule de dérivation des composées :

$$G'(t) = \varphi'(t)\,F'(\varphi(t)).$$

On en déduit :

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\,\mathrm{d}t = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) = G(b) - G(a) = \int_a^b f(\varphi(t)) \times \varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$$

■

Remarque(s) 39 : 1. Il est possible de retenir cette formule plus facilement comme une formule de changements de variables ; si l'on note $s = \varphi$ (et qu'on le pense comme une nouvelle variable) la formule se réécrit :

$$\int_{s(a)}^{s(b)} f(s)\,\mathrm{d}s = \int_a^b f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$$

et il suffit pour l'appliquer de penser à la règle : $\boxed{\mathrm{d}s = \varphi'(t)\,\mathrm{d}t}$ et de ne pas oublier de changer les bornes.

Exemple(s) 61 :

61.1 Calculons une primitive de la fonction : $f(x) = \frac{e^x}{1+e^{2\,x}}$. On a :

$$\int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_c^x \frac{e^t}{1+e^{2\,t}}\,\mathrm{d}t \underset{s=e^t}{=} \int_{e^c}^{e^x} \frac{1}{1+s^2}\,\mathrm{d}s = \left[\arctan(s)\right]_{s=e^c}^{s=e^x} = \arctan(e^x) + C$$

61.2 Cherchons à calculer une primitive sur $\mathbb{R}_+$ de la fonction : $g(x) = \frac{\sqrt{x}}{1+x}$. On a :

$$\int_c^x \frac{\sqrt{t}}{1+t}\,\mathrm{d}t \underset{s=\sqrt{t}}{=} \int_{\sqrt{c}}^{\sqrt{x}} \frac{2\,s^2}{1+s^2}\,\mathrm{d}t = 2\,\sqrt{x} - 2\,\arctan(\sqrt{x}) + C.$$

61.3 Calculons maintenant une primitive de la fonction : $h(x) = \frac{1}{\sin(x)}$, sur l'intervalle $]0, \pi[$. On a :

$$\int_c^x h(t)\,\mathrm{d}t = \int_c^x \frac{\sin(t)}{1-\cos^2(t)}\,\mathrm{d}t \underset{s=\cos(t)}{=} \int_{\cos(c)}^{\cos(x)} \frac{1}{1-s^2}\,\mathrm{d}s$$

$$= \int_{\cos(c)}^{\cos(x)} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-s} - \frac{1}{1+s}\right)\mathrm{d}s = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1-\cos(x)}{1+\cos(x)}\right) + C.$$

61.4 Terminons en cherchant une primitive de la fonction :

$$k(x) = \sqrt{1-x^2}.$$

On a :

$$\int_0^x \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x \underset{x=\sin(s)}{=} \int_0^{\arcsin(x)} |\cos(s)| \times \cos(s)\,\mathrm{d}s$$

Or, $\arcsin(x) \in [-\pi/2, \pi/2]$ donc $\cos(s) \geqslant 0$ d'où :

$$\int_0^x \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\arcsin(x)} \cos^2(s)\,\mathrm{d}s = \int_0^{\arcsin(x)} \frac{\cos(2\,s)+1}{2}\,\mathrm{d}s = \frac{1}{2}\arcsin(x) + \frac{1}{4}\sin(2\arcsin(x)).$$

5.3.4 Utiliser des fonctions complexes

Pour calculer des primitives réelles, il est parfois utile de « passer par les complexes ». Commençons par expliquer ce que signifie dériver au sens complexe.

Définition 5.3.19 : *Soit $f : I \to \mathbb{C}$. On dit que f est dérivable sur I si les fonctions :*

$$\mathrm{Re}(f) : \begin{cases} I \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \mathrm{Re}(f(x)) \end{cases} \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}(f) : \begin{cases} I \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \mathrm{Im}(f(x)) \end{cases}$$

sont dérivables sur I. On note alors :

$$\forall x \in I, \quad f'(x) = \mathrm{Re}(f)'(x) + \mathrm{Im}(f)'(x)\,i.$$

Remarque(s) 40 :

1. Notez bien que **nous n'avons pas** (parce que c'est autrement plus compliqué) parlé de fonctions complexes à valeurs complexes. La fonction considérée ici est réelle à valeurs complexe.
2. On peut donc aussi parler de primitive au sens complexe. En particulier, remarquez que la primitive d'une partie réelle est la partie réelle de la primitive et de même pour la partie imaginaire.

Propriété(s) 5.3.23 : Soit φ une fonction dérivable sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{C}$, alors la fonction définie sur I par $f(t) = \exp(\varphi(t))$ est dérivable sur I et :

$$\forall t \in I, \quad f'(t) = \varphi'(t)\,\exp(\varphi(t)).$$

Démonstration : Écrivons la fonction φ sous sa forme algébrique : $\varphi(t) = a(t) + i\,b(t)$. Alors :

$$\forall t \in I, \quad f(t) = e^{a(t)+i\,b(t)} = e^{a(t)}\,e^{i\,b(t)} = e^{a(t)}\,\cos(b(t)) + i\,e^{a(t)}\,\sin(b(t)).$$

La fonction f est donc dérivable sur I car ses parties réelles et imaginaires le sont par les théorèmes généraux et :

$$\forall t \in I, \quad f'(t) = e^{a(t)}\,(a'(t)\,\cos(b(t)) - b'(t)\,\sin(b(t)) + i\,(a'(t)\,\sin(b(t)) + b'(t)\,\cos(b(t))).$$

Donc :

$$\forall t \in I, \quad f'(t) = e^{a(t)}\,(a'(t) + b'(t))\,(\cos(b(t)) + i\,\sin(b(t))) = \varphi'(t)\,e^{\varphi(t)}.$$

■

Propriété(s) 5.3.24 : Soit u et v deux fonctions dérivables sur I à valeurs dans $\mathbb{C}$ et $a \in \mathbb{C}$. Alors :

1. $a\,u$ est dérivable sur I de dérivée $a\,u'$
2. $u+v$ est dérivable sur I, de dérivée $u'+v'$
3. $u \times v$ est dérivable sur I, de dérivée $u' \times v + u \times v'$
4. si v ne s'annule pas sur I, $\frac{u}{v}$ est dérivable sur I, de dérivée : $\frac{u' \times v - v' \times u}{v^2}$.

Démonstration : Nous nous contenterons de montrer les deux points les plus difficile, les deux derniers. Écrivons

$$u = a + b\,i \quad v = c + d\,i.$$

Alors :

$$u \times v = a \times c - b \times d + (a \times d + b \times c)\,i$$

par le théorèmes généraux sur les fonctions réelles, cette fonction est donc dérivable sur I, de dérivée :

$$(u \times v)' = a' \times c + a \times c' - b' \times d - b \times d' + (a' \times d + a \times d' + b' \times c + b \times c')\,i$$
$$= (a' + b'\,i) \times (c + d\,i) + (a + b\,i) \times (c' + d'\,i) = u' \times v + u \times v'.$$

Déduisons-en 4. Il suffit de remarquer que, par la méthode de la quantité conjuguée $\frac{1}{v} = \frac{c - d\,i}{c^2 + d^2}$. donc par les théorèmes généraux sur les fonctions réelles, $\frac{1}{v}$ puis $\frac{u}{v}$ est dérivable sur I. Mais ce serait inutilement compliqué d'utiliser cette formule pour calculer la dérivée. On a, si v ne s'annule pas sur I :

$$u = \frac{u}{v} \times v \quad \text{donc} \quad u' = \left(\frac{u}{v}\right)' \times v + \frac{u}{v} \times v'$$

et l'on en déduit la formule recherchée.

■

Revenons aux calculs de primitives.

Exemple(s) 62 :

62.1 Considérons la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos(x)\,e^x$. On a :

$$f(x) = \mathrm{Re}(e^{(1+i)\,x}).$$

Une primitive de la fonction f est donc la fonction :

$$F(x) = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{1+i}\,e^{(1+i)\,x}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\,e^x\,\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right).$$

62.2 Considérons maintenant la fonction définie par :

$$g(x) = x^2\,\cos(x) = \mathrm{Re}(x^2\,e^{i\,x}).$$

Cherchons une primitive de la fonction $h(x) = x^2\,e^{i\,x}$. Par intégrations par parties, une primitive de h est donc la fonction : $H(x) = (-i\,x^2 + 2\,x + 2\,i)\,e^{i\,x}$, puis une primitive de g est :

$$G(x) = \mathrm{Re}(H(x)) = 2\,x \times \cos(x) + (x^2 - 2) \times \sin(x).$$

62.3 Enfin, si l'on considère la fonction $a(x) = x\,\cos(x)\,e^x$, on a :

$$a(x) = \mathrm{Re}(x\,e^{(1+i)\,x}).$$

On trouve alors une primitive de $b(x) = x\,e^{(1+i)\,x}$ par intégrations par parties : la fonction $B(x) = \left(\frac{1-i}{2}\,x + \frac{i}{2}\right)\,e^{(1+i)\,x}$. Une primitive de la fonction a est donc la fonction :

$$A(x) = \mathrm{Re}\,(B(x)) = \left(\frac{x}{2}\,\cos(x) + \frac{x-1}{2}\,\sin(x)\right)\,e^x.$$

5.4 Application aux équations différentielles linéaires

5.4.1 Équations différentielles du premier ordre

Définition 5.4.20 : *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et a et b deux fonctions continues sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$. On appelle équation différentielle linéaire du premier ordre une expression du type :*

$$y' + a(t)\, y = b(t).$$

Une solution de cette équation différentielle est une fonction f dérivable sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$ qui vérifie :

$$\forall t \in I, \quad f'(t) + a(t)\, f(t) = b(t).$$

On appelle équation différentielle homogène associée l'équation : $y' + a(t)\, y = 0$.
Le problème de Cauchy associé à cette équation différentielle est la donnée supplémentaire d'une condition initiale $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{K}$. On le note :

$$\begin{cases} y' + a(t)\, y = b(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

une solution du problème de Cauchy est une solution f de l'équation différentielle qui vérifie $f(t_0) = y_0$.

Proposition 5.4.7 : *(Solutions de l'équation homogène) Les solutions de l'équation différentielle homogène :*

$$y' + a(t)\, y = 0.$$

Sont, si A est une primitive de a sur I :

$$\mathcal{S}_0 = \{t \in I \mapsto C\, e^{-A(t)},\ C \in \mathbb{K}\}$$

Démonstration :

1. Si $f(t) = C\, e^{-A(t)}$ alors f est dérivable sur I car A l'est et :
$$\forall t \in I, \quad f'(t) + a(t)\, f(t) = -a(t)\, C\, e^{-A(t)} + a(t)\, C\, e^{-A(t)} = 0$$
donc f est solution de l'équation différentielle.
2. Réciproquement, si f est solution, on pose :
$$\forall t \in I \quad g(t) = f(t)\, e^{A(t)}$$
Alors g est dérivable sur I car f et A le sont et :
$$\forall t \in I, \quad g'(t) = (\underbrace{f'(t) + a(t)\, f(t)}_{=0 \text{ car f est solution}})\, e^{A(t)} = 0$$
donc, comme I est un intervalle, g est constante sur I, c'est-à-dire qu'il existe $C \in \mathbb{K}$ telle que :
$$f(t)\, e^{A(t)} = g(t) = C \iff f(t) = C\, e^{-A(t)}.$$

■

Remarque(s) 41 :
1. Notez l'importance de travailler sur un **intervalle** I.
2. De cette proposition, on en déduit immédiatement l'ensemble des solutions dans le cas où a est une fonction constante : $a = \alpha$:,

$$\boxed{S_0 = \{t \in I \mapsto C\, \exp(-\alpha\, t), \quad C \in \mathbb{K}\}.}$$

3. Terminons en justifiant une méthode appréciée en physique. Remarquons que par la forme des solutions, *si une solution y s'annule en un point de I, alors elle est nulle sur I*. En conséquence, si elle vérifie pour la condition initiale $y(t_0) \neq 0$, elle n'est jamais nulle sur I donc par la théorème des valeurs intermédiaires strictement positive ou strictement négative comme elle est continue. Si $y(t_0)$ est strictement positif, le calcul suivant est donc légitime (et peut permettre de retrouver la formule) :

$$y' + a(t) \times y = 0 \iff \frac{y'}{y} = -a(t) \iff \ln(y) = -A(t) + D \iff y = \exp\left(-A(t) + D\right) = C \times \exp\left(-A(t)\right).$$

Exemple(s) 63 :

63.1 Traitons un exemple venant de la physique : le circuit RC :

$$R \times C \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + u(t) = 0$$

pensez bien à diviser par RC pour vous ramener à la proposition ! Une fois ceci fait, on en déduit les solutions :

$$S_0 = \left\{ t \in \mathbb{R} \mapsto C \, \exp\left(\frac{-t}{RC}\right), \quad C \in \mathbb{R} \right\}.$$

63.2 Prenons maintenant un exemple plus mathématique. Les solutions réelles de l'équation différentielle :

$$y' + \frac{2\,x}{1+x^2}\, y = 0$$

sont par la proposition :

$$S_0 = \left\{ t \in \mathbb{R} \mapsto C \, \exp\left(-\ln(|1+x^2|)\right), \quad C \in \mathbb{R} \right\}.$$

Mais cette expression se simplifie ; on en déduit l'ensemble de solutions :

$$S = \left\{ t \in \mathbb{R} \mapsto \frac{C}{1+x^2}, \quad C \in \mathbb{R} \right\}.$$

Propriété(s) 5.4.25 : (Principe de superposition) Soit a, b_1 et b_2 trois fonctions continues sur l'intervalle I.
Soit f_1 une solution de l'équation différentielle $y' + a(t)\, y = b_1(t)$ et f_2 une solution de l'équation différentielle $y' + a(t)\, y = b_2(t)$.
Alors $f_1 \pm f_2$ est solution de l'équation différentielle $y' + a(t)\, y = b_1(t) \pm b_2(t)$.

Démonstration : Par définition, f_1 et f_2 sont dérivables sur I (donc $f_1 \pm f_2$ aussi par le théorèmes généraux) et vérifient :

$$\begin{array}{rccc} & f_1'(t) & +a(t)\, f_1(t) & = b_1(t) \\ \pm(& f_2'(t) & +a(t)\, f_2(t) & = b_2(t) \quad) \\ \hline & (f_1 \pm f_2)'(t) & +a(t)\,(f_1 \pm f_2)(t) & = b_1(t) \pm b_2(t) \end{array}$$

donc $f_1 \pm f_2$ est solution de l'équation différentielle $y' + a(t)\, y = b_1(t) \pm b_2(t)$.

■

Proposition 5.4.8 : *Supposons que f_0 est une solution particulière de l'équation différentielle :*

$$y' + a(t)\, y = b(t)$$

alors l'ensemble des solutions de cette équation différentielle est, si A est une primitive de a sur I :

$$\mathcal{S} = \{ t \in I \mapsto f_0(t) + C\, e^{-A(t)}, \ C \in \mathbb{K} \}.$$

Démonstration : On a par principes de superpositions :

$$f \text{ est solution de } y' + a(t)\,y = b(t) \iff f - f_0 \text{ est solution de } y' + a(t)\,y = b(t) - b(t) = 0$$

donc $f - f_0$ est solution de l'équation homogène et la propriété est donc une conséquence immédiate de celle donnant les solutions de l'équation homogène.

■

Le problème est alors réduit à : comment trouver une telle solution (si elle existe) ? Supposons que l'on cherche une solution du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y' + a(t)\,y = b(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

L'idée qui suit est appelée **variation de la constante** : si f est une fonction dérivable, on fixe $A(t) = \int_{t_0}^{t} a(u)\,\mathrm{d}u$ la primitive de a qui s'annule en t_0 et l'on pose :

$$C(t) = f(t)\,e^{A(t)} \iff f(t) = C(t)\,e^{-A(t)}$$

alors f est solution de l'équation différentielle si et seulement si :

$$f'(t) + a(t)\,f(t) = b(t) \iff \left(C'(t) - a(t)\,C(t) + a(t)\,C(t)\right)\,e^{-A(t)} = b(t) \iff C'(t) = b(t)\,e^{A(t)}$$

il reste alors à remarquer que $C(t_0) = y_0$ pour conclure : f est solution de l'équation différentielle si et seulement si :

$$f(t) = \left(\int_{t_0}^{t} b(s)\,\exp\left(\int_{t_0}^{s} a(u)\,\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}s + y_0\right)\,\exp\left(\int_{t_0}^{t} -a(u)\,\mathrm{d}u\right).$$

Cette formule n'est absolument pas à retenir par cœur ! Ce sont ses deux conséquences qu'il faut connaître :

pour trouver une solution particulière de l'équation différentielle, on peut précéder par variation de la constante

ce qui se fait en pratique en cherchant f_0 de la forme $\boxed{f_0(t) = C(t)\,e^{-A(t)}}$; remarquez que tout se passe comme si la constante des solutions de l'équation homogène devenait une fonction et

Proposition 5.4.9 : *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et a et b deux fonctions continues sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$. Il existe une unique solution sur $\mathbb{R}$ du problème de Cauchy :*

$$\begin{cases} y' + a(t)\,y = b(t) \\ y(t_0) = y_0. \end{cases}$$

Exemple(s) 64 :

64.1 Résolvons sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle :

$$y' - y = (1+t)\,e^t.$$

L'équation homogène ne pose pas de problème. Pour chercher une solution particulière, on procède par variation de la constante : la fonction $f_0(t) = C(t)\,e^t$ est solution de l'équation différentielle si et seulement si :

$$C'(t)\,e^t = (1+t)\,e^t \iff C'(t) = 1 + t$$

il suffit donc de prendre $C'(t) = \frac{t^2}{2} + t$; on en déduit l'ensemble de solutions :

$$S = \left\{ t \in \mathbb{R} \mapsto \left(C + \frac{t^2}{2} + t\right)\,e^t, \quad C \in \mathbb{R} \right\}.$$

64.2 Résolvons sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle :

$$y' + t\,y = t$$

Une primitive de la fonction $a(t) = t$ est le fonction $A(t) = t^2$. Les solutions de l'équation homogène sont donc le la forme $C\,e^{-t^2}$. Pour trouver une solution particulière, on procède par variation de la constante. Une fonction $f_0 = C(t)\,e^{-t^2}$ est solution de l'équation différentielle si et seulement si :

$$C'(t)\,e^{-t^2} = t \iff C'(t) = t\,e^{t^2}.$$

Il suffit donc de prendre $C(t) = e^{t^2}$ et donc la solution particulière constante égale à un (qu'on aurait pu deviner...). On en déduit l'ensemble de solutions :

$$S = \left\{ t \in \mathbb{R} \mapsto 1 + C\,e^{-t^2}, \quad C \in \mathbb{R} \right\}.$$

64.3 Résolvons le problème de Cauchy.

$$\begin{cases} y' + y = \cos(3\,t) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

La solution f du problème de Cauchy est une solution de l'équation différentielle. Elle s'écrit donc, pour une constante C à déterminer :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \frac{1}{10}\left(\cos(3\,t) + 3\,\sin(3\,t)\right) + C\,e^{-t}.$$

Pour déterminer la constante C, on utilise la condition initiale $y(0) = 0$, qui est vérifiée si et seulement si $\frac{1}{10} + C = 0$. La solution du problème de Cauchy est donc la fonction f définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \frac{1}{10}\left(\cos(3\,t) + 3\,\sin(3\,t) - e^{-t}\right).$$

5.4.2 Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants

Définition 5.4.21 : *Soit I un intervalle et b une fonction définie sur I. Soit p et q deux constantes de $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On appelle équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants une expression du type :*

$$y'' + p\,y' + q\,y = b(t).$$

Une solution de cette équation différentielle est une fonction f définie et dérivable sur I, telle que f' soit aussi dérivable sur I et qui vérifie :

$$\forall t \in I, \quad f''(t) + p\,f'(t) + q\,f(t) = b(t).$$

Un problème de Cauchy du second ordre à coefficients constants est la donnée additionnelle d'une condition initiale, c'est-à-dire de $t_0 \in I$ et de (y_0, z_0) des réels ; on l'écrit souvent :

$$\begin{cases} y'' + p\,y' + q\,y = b(t) \\ y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = z_0 \end{cases}$$

Une solution du problème de Cauchy est une solution f de l'équation différentielle qui vérifie de plus $f(t_0) = y_0$ et $f'(t_0) = z_0$.

Remarque(s) 42 : 1. Comme pour l'équation de degré un, on parle de second membre pour b et d'équation homogène pour :

$$y'' + p\,y' + q\,y = 0.$$

2. Il existe une quantité essentielle pour ces équations différentielles : **l'équation caractéristique associée** :

$$\boxed{z^2 + p\,z + q = 0.}$$

Théorème 5.4.6 (Solutions de l'équation homogène dans le cas complexe.) : *Soit $(p,q) \in \mathbb{C}^2$. L'ensemble des solutions de l'équation différentielle homogène :*

$$y'' + p\,y' + q\,y = 0$$

est :

1. *si $\Delta = p^2 - 4\,q \neq 0$ et $\lambda_1 \neq \lambda_2$ les deux solutions de l'équation caractéristique associée :*

$$\mathcal{S}_0 = \{t \in \mathbb{R} \mapsto C\,e^{\lambda_1\,t} + D\,e^{\lambda_2\,t},\ (C,D) \in \mathbb{C}^2\}.$$

2. *si $\Delta = 0$ et λ est l'unique solution de l'équation caractéristique associée :*

$$\mathcal{S}_0 = \{t \in \mathbb{R} \mapsto (C + D\,t)\,e^{\lambda\,t},\ (C,D) \in \mathbb{C}^2\}.$$

Démonstration : Faisons la preuve dans le premier cas. Dans le deuxième, la preuve est exactement la même et pour le troisième, elle sera exactement la même une fois qu'on saura dériver l'exponentielle complexe. Commençons par remarquer que si λ est une solution de l'équation caractéristique, si $f(t) = \exp(\lambda\,t)$ alors f est deux fois dérivable sur I et :

$$\forall t \in I,\quad f''(t) + p\,f'(t) + q\,f(t) = (\ \underbrace{\lambda^2 + p\,\lambda + q}_{=0 \text{ par définition de } \lambda}\ )\,\exp(\lambda\,t) = 0.$$

Donc $f_1(t) = e^{\lambda_1\,t}$ et $f_2(t) = e^{\lambda_1\,t}$ sont solutions de l'équation différentielle mais alors pour tous complexes C et D :

$$\begin{array}{rccccl} (& f_1''(t) & +p\,f_1'(t) & +q\,f_1(t) & = 0 &)\times C \\ +(& f_2''(t) & +p\,f_2'(t) & +q\,f_2(t) & = 0 &)\times D \\ \hline & (C\,f_1 + D\,f_2)''(t) & +p\,(C\,f_1 + D\,f_2)'(t) & +q\,(C\,f_1 + D\,f_2)(t) & = 0 & \end{array}$$

donc $C\,f_1 + D\,f_2$ est solution de l'équation différentielle.
Montrons que ce sont les seules. Si f est une solution de l'équation différentielle, posons :

$$\forall t \in \mathbb{R},\quad g(t) = f(t)\,\exp(-\lambda_1\,t) \iff f(t) = g(t)\,\exp(\lambda_1\,t).$$

Comme f est solution de l'équation différentielle, on a :

$$f''(t) + p\,f'(t) + q\,f(t) = 0 \iff ((\lambda_1^2 + p\,\lambda_1 + q)\,g(t) + (2\,\lambda_1 + p)\,g'(t) + g''(t))\,e^{\lambda_1\,t} = 0$$

on utilise une nouvelle fois que λ_1 est racine de l'équation caractéristique et on en déduit que g' est solution de l'équation différentielle :

$$y' + (2\,\lambda_1 + p)\,y = 0.$$

Donc par ce qu'on a déjà vu sur les équations différentielles d'ordre un, il existe un complexe A tel que :

$$g'(t) = A\,e^{-(2\,\lambda_1 + p)\,t}$$

remarquons que, si δ est une racine carrée de Δ, $2\,\lambda_1 + p = \delta \neq 0$, il existe donc un complexe B tel que :

$$g(t) = -\frac{A}{\delta}\,e^{-\delta\,t} + B \iff f(t) = -\frac{A}{\delta}\,e^{\lambda_2\,t} + B\,e^{\lambda_1\,t} = C\,e^{\lambda_1\,t} + D\,e^{\lambda_2\,t}.$$

■

Dans le cas où p et q sont deux réels, on cherche souvent seulement les solutions f réelles donc qui vérifient $f = \mathrm{Re}(f)$. On en déduit le théorème :

Théorème 5.4.7 (Solutions de l'équation homogène dans le cas réel.) : *Soit* $(p,q) \in \mathbb{C}^2$. *L'ensemble des solutions de l'équation différentielle homogène :*

$$y'' + p\,y' + q\,y = 0$$

est :

1. *si* $\Delta = p^2 - 4\,q > 0$ *et* $\lambda_1 \neq \lambda_2$ *les deux solutions de l'équation caractéristique associée :*

$$\mathcal{S}_0 = \{t \in \mathbb{R} \mapsto A\,e^{\lambda_1\,t} + B\,e^{\lambda_2\,t},\ (A,B) \in \mathbb{R}^2\}.$$

2. *si* $\Delta = 0$ *et* λ *est l'unique solution de l'équation caractéristique associée :*

$$\mathcal{S}_0 = \{t \in \mathbb{R} \mapsto (A + B\,t)\,e^{\lambda\,t},\ (A,B) \in \mathbb{R}^2\}.$$

3. *si* $\Delta < 0$ *et* $\lambda = a + i\,b$ *est une des deux solutions de l'équation caractéristique associée :*

$$\mathcal{S}_0 = \{t \in \mathbb{R} \mapsto (A\,\cos(b\,t) + B\,\sin(b\,t))\,e^{a\,t},\ (A,B) \in \mathbb{R}^2\}.$$

Démonstration : Le seul calcul non trivial est celui dans le cas d'un discriminant strictement négatif. Dans ce cas, $\lambda = a + i\,b$ et $\overline{\lambda} = a - i\,b$ sont les deux solutions de l'équation caractéristique. Une solution réelle de l'équation différentielle vérifie donc, pour $C = c_1 + i\,c_2$ et $D = d_1 + i\,d_2$ deux complexes :

$$f(t) = \mathrm{Re}(f(t)) = \mathrm{Re}\left(C\,e^{\lambda\,t} + D\,e^{\overline{\lambda}\,t}\right) = \mathrm{Re}\left(C\,e^{\lambda\,t} + D\,e^{\overline{\lambda}\,t}\right) = e^{a\,t}\,\mathrm{Re}\left((c_1 + i\,c_2)\,e^{i\,b\,t} + (d_1 + i\,d_2)\,e^{-i\,b\,t}\right)$$

donc :

$$f(t) = e^{a\,t}\,((\underbrace{c_1 + d_1}_{=A})\,\cos(b\,t) + (\underbrace{-c_2 + d_2}_{=B})\,\sin(b\,t))$$

■

Exemple(s) 65 :

65.1 L'équation différentielle :

$$y'' - y' - 6\,y = 0$$

a pour solutions :

$$S = \left\{t \mapsto C\,e^{3\,t} + D\,e^{-2\,t},\quad (C,D) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

65.2 L'équation différentielle :

$$y'' + 4\,y' + 4\,y = 0$$

a pour solutions :

$$S = \left\{t \mapsto (C\,t + D)\,e^{-2\,t},\quad (C,D) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

65.3 L'équation différentielle :

$$y'' + 4\,y' + 13\,y = 0$$

a pour solutions :

$$S = \left\{t \mapsto (C\,\cos(3\,t) + D\,\sin(3\,t))\,e^{-2\,t},\quad (C,D) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

Comme pour les équations différentielles linéaires d'ordre un, on peut utiliser le principe de superposition ; on en déduit :

Propriété(s) 5.4.26 : Si f_0 est une solution particulière de l'équation différentielle :

$$y'' + p\,y' + q\,y = b(t)$$

alors l'ensemble des solutions de cette équation sont :

$$\boxed{S = \{f_0 + f,\quad f \in S_0\}}$$

où S_0 est l'ensemble des solutions de l'équation différentielle homogène associée.

Terminons, par quelques méthodes pour trouver des solutions particulières :

Forme de b	Forme initiale de la solution particulière à chercher
polynôme	polynôme de même degré
$A\,e^{\lambda\,t}$	$B\,e^{\lambda\,t}$
$A\,\cos(\omega\,t)+B\,\sin(\omega\,t)$	$D\,\cos(\omega\,t)+E\,\sin(\omega\,t)$

Malheureusement, parfois, une telle solution particulière n'existe pas. Dans ce cas, il s'agit de multiplier par t la solution particulière recherchée et de recommencer. La méthode aboutit toujours en multipliant au plus par t^2. Plus précisément, dans le cas d'un second membre de la forme $A\,e^{\lambda\,t}$ la forme à chercher est

1. $B\,e^{\lambda\,t}$ si λ n'est pas solution de l'équation caractéristique,
2. $B\,t\,e^{\lambda\,t}$ est si λ est racine simple (c.à.d. $\Delta\neq 0$)
3. et $B\,t^2\,e^{\lambda\,t}$ si λ est racine double.

En pensant au cas où $\lambda\in\mathbb{C}$ on en déduit que le seul cas où il est nécessaire de multiplier par t avec un second membre $A\,\cos(\omega\,t)+B\,\sin(\omega\,t)$ est le cas où $p=0$ et $\omega^2=q$.

Exemple(s) 66 :

66.1 Considérons l'équation différentielle :

$$y''+2\,y'+y=e^{-t}.$$

L'équation caractéristique $x^2+2\,x+1$ a pour racine double -1, donc l'ensemble des solutions de l'équation homogène est :

$$S_0=\left\{t\mapsto(C+D\,t)\,e^{-t},\quad (C,D)\in\mathbb{R}^2\right\}.$$

Recherchons maintenant une solution particulière. Comme -1 est racine double de l'équation caractéristique, il s'agit de trouver une solution du type $B\,t^2\,e^{-t}$. En remplaçant dans l'équation, on a qu'une telle fonction est solution si et seulement si :

$$2\,B\,e^{-t}=e^{-t}$$

L'ensemble des solutions de l'équation différentielle est donc :

$$S=\left\{t\mapsto\left(\frac{t^2}{2}+D\,t+C\right)e^{-t},\quad (C,D)\in\mathbb{R}^2\right\}.$$

66.2 Soit $\omega\neq\omega_0$ deux réels strictement positifs. Cherchons les solutions de l'équation différentielle :

$$y''+\omega^2\,y=\cos(\omega_0\,t)$$

Commençons par remarques que les solutions de l'équation homogène sont :

$$S_0=\{t\mapsto C\,\cos(\omega\,t)+D\,\sin(\omega\,t),\quad (C,D)\in\mathbb{R}\}.$$

Cherchons une solution particulière de l'équation différentielle. Chance ! Comme $\omega\neq\omega_0$, il s'agit de trouver une solution du type $A\,\cos(\omega_0\,t)+B\,\sin(\omega_0\,t)$. En remplaçant dans l'équation, on trouve qu'une fonction de ce type est solution si et seulement si :

$$\begin{cases}A\,(-\omega_0^2+\omega^2)=1\\ B\,(-\omega_0^2+\omega^2)=0\end{cases}\iff\begin{cases}A=\frac{1}{\omega^2-\omega_0^2}\\ B=0\end{cases}$$

Le solutions de l'équation différentielle sont donc :

$$S=\left\{t\mapsto\frac{\cos(\omega_0\,t)}{\omega^2-\omega_0^2}+C\,\cos(\omega\,t)+D\,\sin(\omega\,t),\quad (C,D)\in\mathbb{R}\right\}.$$

66.3 Cherchons les solutions de l'équation différentielle :

$$y''+y=\cos(t)$$

Les solutions de l'équation homogène sont immédiatement :

$$S_0 = \left\{t \mapsto C\,\cos(t) + D\,\sin(t), \quad (C,D) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

Pour trouver une solution particulière, nous sommes dans le cas où il faut chercher une solution du type $D\,t\,\cos(t) + E\,t\,\sin(t)$. En remplaçant dans l'équation différentielle, on trouve qu'une fonction de ce type est solution si et seulement si :

$$-2\,D\,\sin(t) - D\,t\,\cos(t) + 2\,E\,\cos(t) - E\,t\,\sin(t) + D\,t\,\cos(t) + E\,t\,\sin(t) = \cos(t).$$

c'est-à-dire :

$$\begin{cases} -2\,D = 0 \\ 2\,E = 1 \end{cases}$$

L'ensemble des solutions de l'équation différentielle est donc :

$$S = \left\{t \mapsto \frac{t}{2}\,\sin(t) + C\,\cos(t) + D\,\sin(t), \quad (C,D) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

66.4 Enfin, si l'on cherche les solutions de l'équation différentielle :

$$y'' + y = 2 + \cos(t)$$

On peut utiliser le principe de superposition et remarquer que la fonction constante égale à 2 est solution de l'équation différentielle :

$$y'' + y = 2$$

pour conclure que l'ensemble des solutions est :

$$S = \left\{t \mapsto 2 + \frac{t}{2}\,\sin(t) + C\,\cos(t) + D\,\sin(t), \quad (C,D) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

Propriété(s) 5.4.27 : Si b est une fonction continue sur I alors le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y'' + p\,y' + q\,y = b(t) \\ y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = z_0 \end{cases}$$

admet une unique solution.

Démonstration : Admis. La difficulté n'est pas dans l'unicité (il s'agit juste de résoudre un système pour déterminer les constantes) mais dans l'existence d'une solution particulière dans le cas général.

■

Exemple(s) 67 :

67.1 Soit $\omega \neq \omega_0$. Cherchons la solution du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y'' + \omega^2\,y = \cos(\omega_0\,t) \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

Une solution f du problème de Cauchy est une solution de l'équation différentielle, donc il existe des réels C et D tels que

$$f(t) = \frac{\cos(\omega_0\,t)}{\omega^2 - \omega_0^2} + C\,\cos(\omega\,t) + D\,\sin(\omega\,t).$$

Utilisons maintenant les conditions initiales, qui nous donnent :

$$\begin{cases} \frac{1}{\omega^2-\omega_0^2} + C = 1 \\ D\,\omega = 0 \end{cases}$$

La solution du problème de Cauchy est donc le fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(t) = \frac{\cos(\omega_0\, t) - \cos(\omega\, t)}{\omega^2 - \omega_0^2} + \cos(\omega\, t).$$

Chapitre 6

Calcul matriciel

6.1 Généralités sur les matrices

6.1.1 Définition et opérations algébriques

Définition 6.1.22 : *On appelle* matrice à n lignes et p colonnes $(n,p) \in \mathbb{N}^{*2}$, *toute famille* $(a_{i,j})_{(i,j)\in[\![,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$ *d'éléments d'un ensemble A représentée sous la forme d'un tableau à n lignes et p colonnes :*

$$M = (a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix}.$$

Les éléments de la matrice s'appellent coefficients de la matrice.
On dit aussi que la matrice M est $n \times p$.
L'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes, à coefficients dans A se note :

$$\mathcal{M}_{n,p}(A) \text{ ou } \mathcal{M}_n(A) \text{ lorsque } n = p.$$

Dans la suite, on notera $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Exemple(s) 68 :

68.1 On appelle matrice nulle de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ la matrice dont tous les termes sont nuls. On la note $0_{n,p}$ et si $n = p$, 0_n. Par exemple :

$$0_{2,5} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

68.2 On appelle matrice identité la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ définie par :

$$I_n = (\delta(i,j))_{(i,j)\in[\![1,n]\!]} \quad \text{où} \quad \delta(i,j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

ou encore :

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On définit des opérations sur $M_{n,p}(\mathbb{K})$:

1. *L'addition.*[1]

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{1,1} & \cdots & b_{1,p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n,1} & \cdots & b_{n,p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1}+b_{1,1} & \cdots & a_{1,p}+b_{1,p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1}+b_{n,1} & \cdots & a_{n,p}+b_{n,p} \end{pmatrix}.$$

Que l'on écrit proprement sous la forme :

$$\boxed{(a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]} + (b_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]} = (a_{i,j}+b_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}}$$

2. *La multiplication externe.*

$$\lambda.\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\times a_{1,1} & \cdots & \lambda\times a_{1,p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda\times a_{n,1} & \cdots & \lambda\times a_{n,p} \end{pmatrix}.$$

Que l'on écrit proprement sous la forme :

$$\boxed{\lambda.(a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]} = (\lambda\times a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}.}$$

Exemple(s) 69 :

69.1 On a :

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 5 & 8 & 11 \end{pmatrix}, \quad 4.\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 12 & 16 \\ 12 & 16 & 20 \end{pmatrix}.$$

69.2 Par contre, on ne peut pas faire la somme des matrices :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dans la suite, on notera $-A$ la matrice $(-1).A$. Le propriétés suivantes sont immédiates :

Propriété(s) 6.1.28 : Soit $(n,p) \in \mathbb{N}^{*2}$. Alors :

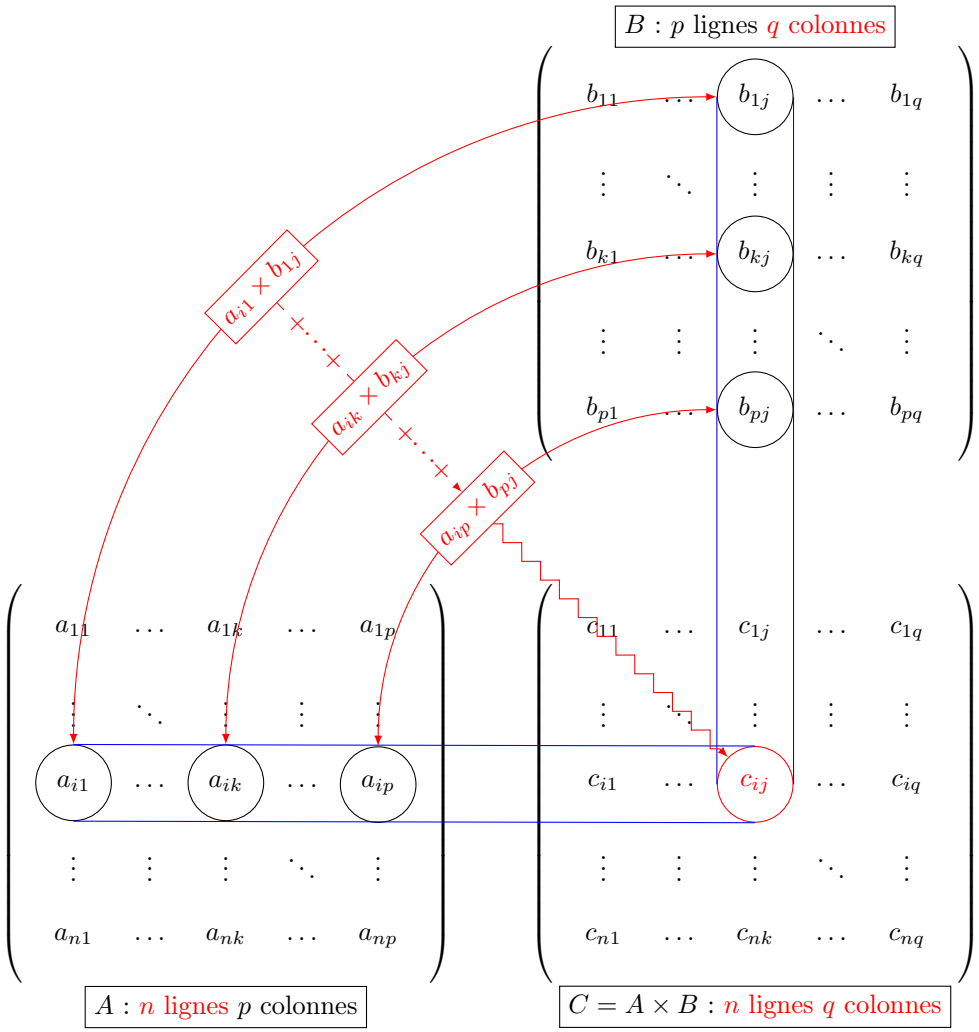
1. La loi $+$ a les propriétés :
   (a) $+$ est associative :
   $$\forall (A,B,C) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})^3, \quad (A+B)+C = A+(B+C),$$
   (b) $+$ est commutative :
   $$\forall (A,B) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})^2, \quad A+B = B+A,$$
   (c) $0_{n,p}$ est neutre pour $+$:
   $$\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \quad A+0_{n,p} = A,$$
   (d) Toute matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ admet un inverse pour $+$: la matrice $-A$: $A+(-A) = 0_{n,p}$.
2. Auxquelles s'ajoutent les propriétés du produit externe :
   (a) $.$ est compatible avec le produit de $\mathbb{K}$:
   $$\forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2, \forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \quad (\lambda\times\mu).A = \lambda.(\mu.A),$$
   (b) $1 \in \mathbb{K}$ est neutre pour $.$:
   $$\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \quad 1.A = A,$$

1. Attention, il faut que les dimensions des matrices soient les mêmes !

(c) . est distributive sur + :

$$\forall(\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2,\forall(A,B)\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})^2,\quad \lambda.(A+B)=\lambda.A+\mu.B \quad\text{et}\quad (\lambda+\mu).A=\lambda.A+\mu.A$$

Pour le produit, on a le schéma suivant [2] :



Que l'on écrit proprement sous la forme :

$$(c_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,q]\!]}=(a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}\times(b_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,p]\!]\times[\![1,q]\!]}=\left(\sum_{k=1}^{p}a_{i,k}\times b_{k,j}\right)_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,q]\!]}$$

Exemple(s) 70 :

70.1 Attention, le produit de matrices n'est pas commutatif ! On a, par exemple :

$$\begin{pmatrix}0&-1&-2\\1&0&-1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&2\\2&4\\3&6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}*&*\\*&*\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1&2\\2&4\\3&6\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0&-1&-2\\1&0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}*&*&*\\*&*&*\\*&*&*\end{pmatrix}.$$

Il est aussi possible que $A\times B$ existe, mais pas $B\times A$:

$$A=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\quad\text{et}\quad B=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

2. Tiré de http://www.texample.net/tikz/examples/matrix-multiplication/

Mais même si les deux produits existent et sont des matrices de mêmes tailles, ils peuvent avoir des valeurs différentes :

$$\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\quad\text{et}\quad\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}.$$

dans la suite, nous dirons que les matrices A et B commutent si $A\times B=B\times A$.

70.2 Il se passe d'autres étrangetés avec le produit de matrices ; le théorème de produit nul est par exemple faux :

$$\underbrace{\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}}_{\neq 0_2}\times\underbrace{\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}}_{\neq 0_2}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}.$$

70.3 Il y a un cas pour lequel le produit de matrices deux matrices est particulièrement facile à calculer ; si elles sont **diagonales**, c'est-à-dire si elles sont carrées tous leurs termes sont nuls sauf ceux de la diagonale :

$$\begin{pmatrix}d_1&0&0&\cdots&0\\0&d_2&0&\cdots&0\\\vdots&\ddots&\ddots&\ddots&\vdots\\0&\cdots&0&d_{n-1}&0\\0&\cdots&0&0&d_n\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}d'_1&0&0&\cdots&0\\0&d'_2&0&\cdots&0\\\vdots&\ddots&\ddots&\ddots&\vdots\\0&\cdots&0&d'_{n-1}&0\\0&\cdots&0&0&d'_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}d_1\times d'_1&0&0&\cdots&0\\0&d_2\times d'_2&0&\cdots&0\\\vdots&\ddots&\ddots&\ddots&\vdots\\0&\cdots&0&d_{n-1}\times d'_{n-1}&0\\0&\cdots&0&0&d_n\times d'_n\end{pmatrix}$$

Heureusement pour nous, certaines propriétés usuelles du produit restent valables :

Propriété(s) 6.1.29 : Soit $(n,p,q,r)\in\mathbb{N}^{*4}$. Alors :

1. la loi $\times$ est associative :
$$\forall A\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}),\forall B\in\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}),\forall C\in\mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K}),\quad (A\times B)\times C=A\times(B\times C),$$
2. la matrice identité est neutre pour le produit :
$$\forall A\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}),\quad A\times I_p=A,\quad I_n\times A=A,$$
3. la loi $\times$ est distributive sur la loi $+$:
$$\forall (A,B)\in\mathcal{M}_{n,p}^2(\mathbb{K}),\forall C\in\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}),\quad (A+B)\times C=A\times C+B\times C,$$
$$\forall (A,B)\in\mathcal{M}_{p,q}^2(\mathbb{K}),\forall C\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}),\quad C\times(A+B)=C\times A+C\times B.$$
4. enfin :
$$\forall\lambda\in\mathbb{K},\forall A\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}),\forall B\in\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}),\quad (\lambda.A)\times B=\lambda.(A\times B)=A\times(\lambda.B).$$

Démonstration : L'associativité du produit est une conséquence de la formule des sommes « rectangulaires » :

$$\forall (i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,r]\!],\quad\sum_{k=1}^{q}\left(\sum_{l=1}^{p}a_{i,l}\times b_{l,k}\right)\times c_{k,j}=\sum_{l=1}^{p}a_{i,l}\times\left(\sum_{k=1}^{q}b_{l,k}\times c_{k,j}\right).$$

Les autres propriétés se prouvent par calculs directs.

■

6.1.2 Matrices carrées

6.1.2.1 Puissances de matrices

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ont une propriété particulière : le produit de deux telles matrices est toujours défini. En particulier, si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ on peut définir les puissances de A de la façon suivante :

$$A^0 = I_n, \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad A^{k+1} = A \times A^k (= A^k \times A).$$

Si $k \in \mathbb{N}^*$, on note aussi parfois :

$$A^k = \underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{k \text{ fois}}.$$

Exemple(s) 71 :

71.1 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ on montre par récurrence sur k que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad A^k = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

71.2 Comme pour le produit, les puissances d'une matrice diagonale sont particulièrement faciles à calculer :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & d_{n-1} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & d_n \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} d_1^k & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2^k & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & d_{n-1}^k & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & d_n^k \end{pmatrix}$$

71.3 Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a :

$$(A+B)^2 = A^2 + 2.A \times B + B^2 \iff A \times B = B \times A.$$

En effet :

$$(A+B)^2 = (A+B) \times (A+B) = A^2 + A \times B + B \times A + B^2$$

et l'équivalence est maintenant claire :

$$(A+B)^2 = A^2+2.A\times B+B^2 \iff (A+B) = A^2+A\times B+B\times A+B^2 = A^2+2.A\times B+B^2 \iff A\times B = B\times A.$$

L'exemple précédent montre qu'il est suffisant que la matrices A et B commutent pour développer le carré d'une somme avec les formules usuelles. C'est un fait général :

Théorème 6.1.8 (binôme de Newton pour les matrices) : *Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ deux matrices qui commutent. Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$:*

$$(A+B)^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} .A^i \times B^{k-i}.$$

Démonstration : Il suffit de relire la preuve de la formule du binôme de Newton dans la cas complexe en faisant attention de bien remplacer les 1 par des I_n pour les puissances 0-ièmes et à repérer l'endroit où l'on utilise que A et B commutent.

■

Exemple(s) 72 :

72.1 On a donc, si A et B commutent :

$$(A+B)^3 = A^3 + 3.A^2 \times B + 3.A \times B^2 + B^3.$$

72.2 On peut se poser la question de savoir si la condition que les matrices A et B commutent est nécessaire et suffisante en général ; c'est faux dès que $n \geqslant 3$, par exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ne commutent pas, car :

$$A \times B = 0_3 \quad \text{et} \quad B \times A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

mais :

$$(A+B)^3 = 0_3 \quad \text{et} \quad A^2 = B^2 = 0_3 \quad \text{donc} \quad A^3 + 3.A^2 \times B + 3.A \times B^2 + B^3 = 0_3.$$

72.3 Il existe une matrice qui commute avec toutes les autres matrices : la matrice identité. En effet :

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \quad A \times I_n = A = I_n \times A.$$

On en déduit, pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,

$$(A + I_n)^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} . A^k.$$

Cette formule est souvent utile dans les exercices. Par exemple, si

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3 + A \quad \text{avec} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Or, un calcul direct montre :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A^3 = 0_3$$

on en déduit :

$$\forall k \geqslant 2, \quad B^k = (I_3 + A)^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} . A^k = I_3 + k.A + \frac{k \times (k-1)}{2} . A^2 = \begin{pmatrix} 1 & k & \frac{k \times (k+1)}{2} \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Et l'on remarque que cette formule est aussi vraie si $k = 0$ et $k = 1$.

6.1.2.2 Matrices inversibles

Définition 6.1.23 : *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A est inversible s'il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Telle que :*

$$A \times B = B \times A = I_n.$$

On note $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Remarque(s) 43 : 1. Si une telle matrice B existe, elle est unique, on la note alors A^{-1} et on l'appelle inverse de la matrice A.

Démonstration : Supposons que B et B' vérifient

$$A \times B = B \times A = I_n \quad A \times B' = B' \times A = I_n$$

Alors $A \times B = A \times B'$ donc $B = B \times (A \times B) = (B \times A) \times B' = B'$.

■

2. Il est vrai, mais nous ne le prouverons que beaucoup plus tard, que pour montrer qu'une matrice A est inversible, il suffit de montrer qu'il existe une matrice B telle que $A \times B = I_n$ **ou** $B \times A = I_n$.
3. Les matrices inversibles sont celles par lesquelles on a le droit de «simplifier multiplicativement» ; plus précisément,

$$\boxed{(A \times C = B \times C \text{ et } C \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})) \Longrightarrow A = B.}$$

Exemple(s) 73 :

73.1 La matrice identité est inversible, en effet :

$$I_n \times I_n = I_n \times I_n = I_n.$$

73.2 Une matrice diagonale dont tous les coefficients diagonaux sont nuls est inversible. En effet (les deux matrices considérées commutent donc il suffit de faire la vérification dans un sens) :

$$\begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & d_{n-1} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & d_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1/d_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1/d_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1/d_{n-1} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1/d_n \end{pmatrix} = I_n.$$

73.3 Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. On suppose que $\boxed{a\,d - b\,c \neq 0}$. Alors A est inversible et

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{a\,d - b\,c} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.}$$

En effet :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \times \left(\frac{1}{a\,d - b\,c} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \left(\frac{1}{a\,d - b\,c} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \right) \times \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

73.4 La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est inversible. En effet :

$$A^3 - 2\,A = I_3 \quad \text{donc} \quad A \times (A^2 - 2\,I_3) = (A^2 - 2\,I_3) \times A = I_3.$$

En particulier, $A^{-1} = A^2 - 2\,I_3$.[3]

73.5 De nombreuses matrices ne sont pas inversibles ; une méthode pour montrer qu'une matrice n'est pas inversible est d'utiliser le résultat :

$$\boxed{\text{si il existe } B \neq 0_n \text{ telle que : } A \times B = 0_n, \text{ alors } A \text{ n'est pas inversible.}}$$

En effet, si elle était inversible, alors :

$$A \times B = 0_n \Longrightarrow B = (A^{-1} \times A) \times B = A^{-1} \times 0_n = 0_n$$

absurde !

3. Cette expression n'a bien entendu pas été trouvée par hasard ! Vous verrez en deuxième année qu'elle vient du polynôme caractéristique de la matrice. Vous entendrez souvent que pour la matrice A, $X^3 - 2\,X - 1$ est un *polynôme annulateur*.

73.6 La matrice nulle n'est donc pas inversible : $0_n \times I_n = 0_n$ par ex.

73.7 Une matrice diagonale dont l'un des termes est nul n'est pas inversible, en effet, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$:

$$\begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & d_{i-1} & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & d_{i+1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & d_n \end{pmatrix} \times \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\neq 0_n} = 0_n.$$

73.8 Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. On suppose que $\boxed{a\,d - b\,c = 0}$. Alors A **n'est pas inversible**. Si elle est nulle, c'est le premier exemple. Sinon, il suffit de remarquer que :

$$A \times \underbrace{\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}}_{\neq 0_2 \text{ car } A \neq 0_2} = 0_2.$$

73.9 La matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible. En effet :

$$A^3 = A \times A^2 = A \times \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\neq 0_3} = 0_3.$$

Propriété(s) 6.1.30 : Soit $(A, B) \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$. Alors

1. $A \times B \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ et $(A \times B)^{-1} = B^{-1} \times A^{-1}$
2. A^{-1} est inversible et $(A^{-1})^{-1} = A$.

Démonstration : Concernant le produit, c'est un calcul direct :

$$A \times B \times B^{-1} \times A^{-1} = B^{-1} \times A^{-1} \times A \times B = I_n.$$

Concernant le deuxième point, il suffit de regarder d'un autre œuil l'égalité : $A^{-1} \times A = A \times A^{-1} = I_n$.

■

6.1.3 Quelques familles de matrices

6.1.3.1 Matrices triangulaires supérieures

Définition 6.1.24 : *Soit $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $T = (t_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$. On dit que T est triangulaire supérieure si :*

$$\forall i > j, \quad t_{i,j} = 0$$

elle s'écrit alors :

$$T = \begin{pmatrix} t_{1,1} & t_{1,2} & t_{1,3} & \cdots & t_{1,n} \\ 0 & t_{2,2} & t_{2,1} & \cdots & t_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & t_{n-1,n-1} & t_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & t_{n,n} \end{pmatrix}.$$

Remarque(s) 44 :
1. On appelle matrice triangulaire supérieure stricte une matrice triangulaire supérieure dont les termes diagonaux sont nuls.
2. On définit de la même manière les matrices triangulaires inférieures (strictes), il suffit de remplacer $i > j$ par $j > i$.
3. Une matrice diagonale est aussi une matrice triangulaire supérieure et inférieure.

Propriété(s) 6.1.31 : Soit A et B deux matrices triangulaires supérieures, $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors :
1. $A + B$ est triangulaire supérieure,
2. $\lambda.A$ est triangulaire supérieure,
3. $A \times B$ est triangulaire supérieure.

Démonstration : Seul le produit est non trivial à traiter. On écrit, si $j > i$:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{i,k} \times b_{k,j} = \sum_{k=1}^{i} a_{i,k} \times \underbrace{b_{k,j}}_{=0} + \sum_{k=i+1}^{n} \underbrace{a_{i,k}}_{=0} \times b_{k,j} = 0.$$

■

Il est facile de calculer les coefficients diagonaux d'un produit de matrices triangulaires supérieures :

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & * & \cdots & * \\ 0 & a_{2,2} & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_{1,1} & * & \cdots & * \\ 0 & b_{2,2} & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & b_{n,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} \times b_{1,1} & * & \cdots & * \\ 0 & a_{2,2} \times b_{2,2} & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,n} \times b_{n,n} \end{pmatrix},$$

mais ne généralisez pas hâtivement aux autres termes !

6.1.3.2 Matrices nilpotentes

On appelle **matrice nilpotente** une matrice $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui admet un entier naturel d tel que $N^d = 0_n$. Les matrices nilpotentes ne sont donc pas inversibles.

Exemple(s) 74 :

74.1 Les matrices triangulaires strictes sont nilpotentes, ceci se voit facilement en considérant les colonnes des matrices puissances, qui sont de plus en plus envahies par les zéros. En particulier, elles ne sont jamais inversibles.

74.2 Mais ce ne sont pas les seules :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 15 & -9 & 6 \\ 10 & -6 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{vérifie} \quad A^2 = 0_n.$$

Soit A et B deux matrices nilpotentes **qui commutent**. Alors $A \times B$ et $A + B$ sont nilpotentes.

Démonstration : Soit p et q deux entiers naturels tels que $A^p = B^q = 0_n$. Alors :

$$(A \times B)^{\min(p,q)} \underbrace{=}_{A \times B = B \times A} A^{\min(p,q)} \times B^{\min(p,q)} = 0_n.$$

De plus, par le binôme de Newton, qu'il est légitime d'utiliser car A et B commutent :

$$(A+B)^{p+q} = \sum_{k=0}^{p+q} \binom{p+q}{k} . A^k \times B^{p+q-k} = \sum_{k=0}^{p} \binom{p+q}{k} . A^k \times \underbrace{B^{p+q-k}}_{=0_n} + \sum_{k=p+1}^{p+q} \binom{p+q}{k} . \underbrace{A^k}_{=0_n} \times B^{p+q-k} = 0_n.$$

■

6.1.3.3 Transposition, matrices symétriques et antisymétriques

Définition 6.1.25 : *Soit $A = (a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On appelle matrice transposée de A et on note $A^\top$ (ou ${}^tA$) la matrice : $A^\top = (a_{j,i})_{(j,i)\in[\![1,p]\!]\times[\![1,n]\!]} \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$:*

$$A^\top = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p,1} & \cdots & a_{p,n} \end{pmatrix}.$$

Exemple(s) 75 :

75.1 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$. On a : ${}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$.

75.2 Si

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{alors} \quad {}^tX = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix}.$$

Propriété(s) 6.1.32 : On a :

1. Pour tout $(A,B) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$:
$${}^t({}^tA) = A, \quad {}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB \quad \text{et} \quad {}^t(\lambda.A) = \lambda.{}^tA.$$
2. Pour tout $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$:
$${}^t(A \times B) = {}^tB \times {}^tA.$$
3. Pour tout $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$, ${}^tA \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ et $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$.

Démonstration : Le premier point est immédiat, pour le deuxième, le coefficient en (i,j) de la matrice ${}^t(A \times B)$ s'écrit : $\sum_{k=1}^{p} a_{j,k} \times b_{k,i}$ et celui de la matrice ${}^tB \times {}^tA$ s'écrit : $\sum_{k=1}^{p} b_{k,i} \times a_{j,k}$; ce sont les mêmes ! Pour le dernier point, on remarque que, comme :

$$A \times A^{-1} = I_n = A^{-1} \times A$$

on a :

$$(A^{-1})^\top \times A^\top = (A \times A^{-1})^\top = I_n = (A^{-1} \times A)^\top = A^\top \times (A^{-1})^\top.$$

■

Définition 6.1.26 : *On appelle matrice symétrique une matrice A qui est égale à sa transposée : ${}^tA = A$. On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle matrice antisymétrique une matrice A qui est égale à l'opposé de sa transposée : ${}^tA = -A$. On note $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices antisymétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.*

Remarque(s) 45 : 1. Pour qu'une matrice soit symétrique ou antisymétrique il **faut** qu'elle appartienne à $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

2. L'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est l'ensemble des matrices qui s'écrivent :

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{1,n} & \cdots & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}.$$

En particulier, la somme de deux matrices symétrique est symétrique et le produit par un scalaire d'une matrice symétrique est symétrique.

3. L'ensemble des matrices antisymétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est l'ensemble des matrices qui s'écrivent :

$$\begin{pmatrix} 0 & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ -a_{1,2} & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -a_{1,n} & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

En particulier, la somme de deux matrices symétrique est symétrique et le produit par un scalaire d'une matrice symétrique est symétrique.

Exemple(s) 76 :

76.1 Soit $(A, B) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{K})$. Montrons que $A \times B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ si et seulement si A et B commutent.

Démonstration : On a, comme A et B sont symétriques :

$$(A \times B)^T = B^T \times A^T = B \times A$$

donc

$$(A \times B)^T = A \times B \iff B \times A = A \times B.$$

■

76.2 Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors ${}^tA \times A$ et $A \times {}^tA$ sont symétriques.

6.1.3.4 Matrices élémentaires

C'est le seul cas de matrices pas toujours carrées que nous traiterons ici. Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, m]\!]$. On appelle matrices élémentaires et on note $E_{i,j}$ la matrice sont tous les termes sont nuls sauf le terme (i, j), qui vaut 1 :

$$E_{i,j} = (\delta_{p,q})_{\substack{1 \leqslant p \leqslant n \\ 1 \leqslant q \leqslant m}} \quad \text{avec} \quad \delta_{p,q} = \begin{cases} 1 & \text{si } (p,q) = (i,j) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Le matrices élémentaires sont particulièrement utiles car toute matrice peut s'écrire comme combinaison linéaire de matrice élémentaire : si $A = (a_{i,j})_{(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,m]\!]} \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$:

$$\boxed{A = \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant m}} a_{i,j}.E_{i,j}.}$$

Propriété(s) 6.1.33 : Soit $E_{i,j} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $E_{k,l} \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. Alors :

$$E_{i,j} \times E_{k,l} = \begin{cases} 0_{n,q} & \text{si } j \neq k \\ E_{i,l} & \text{si } j = k \end{cases}.$$

Démonstration : Il suffit d'écrire le produit.

■

6.2 Systèmes linéaires

6.2.1 Définitions, lien avec les matrices

Définition 6.2.27 : *On appelle système linéaire de p équations à n inconnues $x_1, x_2, \cdots, x_n$ un système du type :*

$$\begin{cases} a_{1,1}\,x_1 + a_{1,2}\,x_2 + \cdots + a_{1,n}\,x_n = b_1 \\ a_{2,1}\,x_1 + a_{2,2}\,x_2 + \cdots + a_{2,n}\,x_n = b_2 \\ \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \quad \vdots \\ a_{p,1}\,x_1 + a_{p,2}\,x_2 + \cdots + a_{p,n}\,x_n = b_p \end{cases}$$

*les réels (ou complexes) $a_{i,j}$ sont appelés les **coefficients du système** et les réels b_i le **second membre du système**. Une **solution** du système est un n-tuple de réels $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ qui vérifie toutes les équations du système. Un tel système linéaire est dit **compatible** si il admet au moins une solution.*

Si l'on pose $A = (a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,p]\!]\times[\![1,n]\!]} \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$,

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$$

le système est équivalent à l'égalité matricielle :

$$\boxed{A \times X = B.}$$

Il est souvent utile de « voir » ce produit en utilisant les colonnes de A. Si on les note $C_1, C_2, \ldots, C_n$ alors

$$A \times X = x_1.C_1 + x_2.C_2 + \cdots + x_n.C_n$$

En particulier, le système $A \times X = B$ est compatible si et seulement si B est une combinaison linéaire des colonnes de A.

Exemple(s) 77 :

77.1 Considérons le système :

$$\begin{cases} 2\,x & -y & +3\,z & = & 1 \\ -4\,x & +2\,y & +z & = & 3 \\ -2\,x & +y & +4\,z & = & 4 \\ 10\,x & -5\,y & -6\,z & = & -10 \end{cases} \iff \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 + 2.L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 5.L_1 \end{array} \begin{cases} 2\,x & -y & +3\,z & = & 1 \\ & & 7\,z & = & 5 \\ & & 7\,z & = & 5 \\ & & -21\,z & = & -15 \end{cases}$$

$$\iff \begin{array}{l} L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 + 3\,L_2 \end{array} \begin{cases} 2\,x & -y & +3\,z & = & 1 \\ & & 7\,z & = & 5 \\ & & 0 & = & 0 \\ & & 0 & = & 0 \end{cases} \iff L_2 \leftarrow 1/7.L_2 \begin{cases} 2\,x & -y & +3\,z & = & 1 \\ & & z & = & 5/7 \\ & & 0 & = & 0 \\ & & 0 & = & 0 \end{cases}$$

$$\iff L_1 \leftarrow L_1 - 3.L_2 \begin{cases} 2\,x & -y & & = & -8/7 \\ & & z & = & 5/7 \\ & & 0 & = & 0 \\ & & 0 & = & 0 \end{cases} \iff L_1 \leftarrow 1/2.L_1 \begin{cases} x & -y/2 & & = & -8/14 \\ & & z & = & 5/7 \\ & & 0 & = & 0 \\ & & 0 & = & 0 \end{cases}$$

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{ \left(\frac{y}{2} - \frac{8}{14}, y, \frac{5}{7} \right), \quad y \in \mathbb{R} \right\}}$$

77.2 Cependant, si l'on modifie légèrement le système précédent, avec les mêmes opérations :

$$\begin{cases} 2\,x & -y & +3\,z & = & 1 \\ -4\,x & +2\,y & +z & = & 3 \\ -2\,x & +y & +4\,z & = & 4 \\ 10\,x & -5\,y & -6\,z & = & -11 \end{cases} \iff \begin{cases} 2\,x & -y & +3\,z & = & 1 \\ & & 7\,z & = & 5 \\ & & 0 & = & 0 \\ & & 0 & = & -1 \end{cases}$$

$$\boxed{\mathcal{S} = \emptyset}$$

Le système est incompatible.

On appelle **système homogène associé** au système $A \times X = B$ le système $A \times X = 0_{p,1}$. L'ensemble des solutions de ce système est appelé **noyau** de la matrice A et noté $\mathrm{Ker}(A)$. Autrement dit :

$$\boxed{\mathrm{Ker}(A) = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}),\ A \times X = 0_{p,1}\}.}$$

Exemple(s) 78 :

78.1 On considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & -4 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Alors ${}^t(x, y, z) \in \mathrm{Ker}(A)$ si et seulement si :

$$\left\{\begin{array}{rrrcl} -x & -2\,y & +z & = & 0 \\ 2\,x & +4\,y & -4\,z & = & 0 \\ -x & -2\,y & +3\,z & = & 0 \end{array}\right. \begin{array}{c} \\ \iff \\ L_2 \leftarrow L_2 + 2.L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array} \left\{\begin{array}{rrrcl} -x & -2\,y & +z & = & 0 \\ & & -2\,z & = & 0 \\ & & 2\,z & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\begin{array}{c} \iff \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \end{array} \left\{\begin{array}{rrrcl} -x & -2\,y & +z & = & 0 \\ & & -2\,z & = & 0 \\ & & 0 & = & 0 \end{array}\right.$$

Donc :

$$\mathrm{Ker}(A) = \{{}^t(-2\,y, y, 0),\ y \in \mathbb{K}\}$$

78.2 Il est souvent utile de trouver un élément particulier du noyau. Pour ceci, on peut chercher une combinaison linéaire des colonnes qui représente la matrice nulle. Par exemple, si :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Alors $1.C_1 + 0.C_2 + (-1).C_3 = 0_{3,1}$ par exemple donc ${}^t(1, 0, -1) \in \mathrm{Ker}(A)$.

Proposition 6.2.10 : *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors :*

$$A \text{ est inversible} \iff \mathrm{Ker}(A) = \{0_{n,1}\}.$$

Démonstration : Si A est inversible, alors $A \times X = 0_{n,1}$ équivaut à $X = A^{-1} \times 0_{n,1} = 0_{n,1}$ donc $\mathrm{Ker}(A) = \{0_{n,1}\}$. Nous admettrons temporairement l'implication réciproque.

■

Exemple(s) 79 :

79.1 Par ce qu'on a vu :

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & -4 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ne sont pas inversibles car leur noyau n'est pas réduit à la matrice nulle.

79.2 La matrice :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

admet pour noyau les matrice $X = {}^t(x, y, z)$ qui vérifient :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} -x & + & y & + & z & = & 0 \\ x & - & y & + & z & = & 0 \\ x & + & y & - & z & = & 0 \end{array}\right. \begin{array}{c} \\ \iff \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{array} \left\{\begin{array}{rcrcrcl} -x & + & y & + & z & = & 0 \\ & & & & 2\,z & = & 0 \\ & & 2\,y & & & = & 0 \end{array}\right. \iff x = y = z = 0$$

Donc A est inversible

79.3 Soit T une matrice triangulaire inférieure. Si tous ses coefficients diagonaux sont non nuls, alors clairement, $\text{Ker}(T) = \{0_{n,1}\}$. Donc T est inversible. Réciproquement, si il existe i tel que $t_{i,i} = 0$ alors $T \times B_i = 0_{n,1}$, où B_i est la i-ième colonne de la matrice identité. Or $B_i \neq 0_{n,1}$ donc T n'est pas inversible. Dans le cas où T est triangulaire supérieure, on se ramène au cas inférieur en considérant sa transposée. Finalement :

Une matrice triangulaire est inversible si et seulement si ses coefficients diagonaux sont tous non nuls.

Propriété(s) 6.2.34 : Si le système $A \times X = B$ est compatible alors, si X_0 est une solution particulière, l'ensemble des solutions du système est :

$$\mathcal{S} = \{X + X_0, \quad X \in \text{Ker}(A)\}.$$

Démonstration : Comme X_0 est solution particulière, on a $A \times X_0 = B$. On en déduit que Y est solution si et seulement si :

$$A \times Y = B = A \times X_0 \iff A \times (Y - X_0) = 0_{p,1} \iff Y - X_0 \in \text{Ker}(A).$$

■

6.2.2 Calcul d'inverse par résolution de système.

Proposition 6.2.11 : *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors A est inversible si et seulement si pour tout $(X, B) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})^2$,*

$$A \times X = B$$

admet une unique solution. De plus, dans ce cas : $X = A^{-1} \times B$.

Démonstration : Le sens direct est immédiat. Pour la réciproque, on considère pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, B_i la i-ième colonne de la matrice I_n. Alors par hypothèse, il existe $X_i \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ tel que $A \times X_i = B_i$. Si l'on considère la matrice $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont les colonnes sont les X_i, on a alors : $A \times X = B$. La matrice A est donc inversible.

■

Remarque(s) 46 :
1. En particulier, si un tel système est **incompatible ou admet plus d'une solution**, **la matrice A n'est pas inversible.**
2. Cette proposition nous donne de plus une méthode pratique pour étudier l'inversibilité de A et éventuellement calculer A^{-1} :
   (a) Considérer le système $A \times X = B$ avec X et B quelconques,
   (b) résoudre ce système,
   (c) dans le cas où ce système admet une unique solution, lire les coefficients de A^{-1} dans l'expression de X en fonction de B. Sinon, A n'est pas inversible.

Exemple(s) 80 :

80.1 On considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Montrons que A est inversible et déterminons son inverse. Pour ceci, on résout le système :

$$\begin{cases} & y & +z & = & a \\ x & & +z & = & b \\ x & +y & & = & c \end{cases} \iff \begin{cases} x & = & -1/2\,a & +1/2\,b & +1/2\,c \\ y & = & 1/2\,a & -1/2\,b & +1/2\,c \\ z & = & 1/2\,a & +1/2\,b & -1/2\,c \end{cases}$$

Donc A est inversible et :

$$A^{-1} = \frac{1}{2}.\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Revenons sur la méthode du paragraphe précédent. Résoudre l'équation

$$A \times X = I_n \times B$$

se fait en effectuant sur les matrices A et I_n les mêmes opérations sur les lignes. Ce système admet une unique solution si et seulement si A est inversible et alors :

$$I_n \times X = A^{-1} \times B$$

Pour cette raison, on peut se concentrer sur les matrices et écrire la matrice augmentée $(A|I_n)$ sur laquelle on effectue des opérations sur des lignes (en écrivant le symbole $\underset{L}{\sim}$ entre les matrices). Traduisons alors le résultat de la proposition du paragraphe précédent :

1. Si le système admet une unique solution alors A est inversible et on obtient la matrice augmentée $(I_n|A^{-1})$.
2. Si ce n'est pas le cas, A n'est pas inversible. En pratique, ce cas arrive si l'on obtient une ligne nulle.

Exemple(s) 81 :

81.1 Considérons la matrice : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. On a :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{\underset{L}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{L_2 \leftarrow -L_2}{\underset{L}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 + L_2}{\underset{L}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{L_1 \leftarrow L_1 + L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_3}}{\underset{L}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right).$$

La matrice A est donc inversible, et $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

81.2 Considérons maintenant la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. On a :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{\underset{L}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}{\underset{L}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

La dernière ligne étant composée de 0, la matrice B n'est pas inversible.

Propriété(s) 6.2.35 : Soit $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice triangulaire inférieure dont les coefficients sont non nuls. Alors T est inversible et T^{-1} est triangulaire inférieure.

Remarque(s) 47 : Bien entendu, ce résultat est aussi valable pour une matrice triangulaire supérieure.

6.2.3 Interprétation du Pivot de Gauss en termes de matrices.

Définition 6.2.28 : *Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $i \neq j$. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda \neq 0$ et $\mu \in \mathbb{K}$. On appelle :*

1. *Matrice de permutation une matrice du type :*

$$P_{i,j} = I_n - (E_{i,i} + E_{j,j}) + E_{i,j} + E_{j,i} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 0 & & 1 & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & 1 & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix},$$

2. *matrice de dilatation une matrice du type :*

$$D_i(\lambda) = I_n + (\lambda - 1).E_{i,i} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & \lambda & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix},$$

3. *matrice de transvection une matrice du type :*

$$T_{i,j}(\mu) = I_n + \mu.E_{i,j} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & \mu & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Remarque(s) 48 : Ces matrices sont surtout intéressantes car il est facile de visualiser l'effet que produit sur une matrice A leur multiplication. Plus précisément, multiplier

1. *à gauche* la matrice A par :
   (a) $P_{i,j}$ permute les lignes i et j de la matrice A
   (b) $D_i(\lambda)$ multiplie la ligne i de la matrice A par $\lambda \neq 0$
   (c) $T_{i,j}(\mu)$ ajoute à la ligne i de A μ fois la ligne j de A.
2. *à droite* la matrice A par :
   (a) $P_{i,j}$ permute les colonnes i et j de la matrice A
   (b) $D_i(\lambda)$ multiplie la colonne i de la matrice A par $\lambda \neq 0$
   (c) $T_{i,j}(\mu)$ ajoute à la colonne j de A μ fois la colonne i de A.

Propriété(s) 6.2.36 : Toutes les matrices élémentaires sont inversibles. Plus précisément, si $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ $i \neq j$, $\lambda \in \mathbb{K}^*$ et $\mu \in \mathbb{K}$, on a :

$$P_{i,j}^{-1} = P_{j,i} \quad D_i(\lambda)^{-1} = D_i\left(\frac{1}{\lambda}\right), \quad \text{et} \quad T_{i,j}(\mu)^{-1} = T_{i,j}(-\mu).$$

Démonstration : Ces propriétés se prouvent facilement en utilisant la définition de l'inverse. Pour montrer la dernière, il suffit par exemple de remarquer que si l'on ajoute λ fois à la ligne i la ligne j de la matrice identité, puis qu'on la retranche, on retombe sur la matrice identité.

■

Remarque(s) 49 : En particulier, multiplier une matrice par une matrice élémentaire ou de façon équivalente effectuer des opérations élémentaires sur ses lignes et ses colonnes préserve le caractère inversible ou non inversible de la matrice.

Chapitre 7

Suites numériques

7.1 Premiers exemples

7.1.1 Suites arithmético-géométriques

Soit $(a,b) \in \mathbb{K}^2$. On considère les suites définies par la formule de récurrence :

$$u_{n+1} = a\,u_n + b.$$

On appelle un tel type de « suite arithmético-géométrique ».

1. Si $a = 1$, il s'agit de suites arithmétiques ; on trouve $u_n = u_0 + n\,b$,
2. Si $b = 0$, il s'agit de suites géométriques ; on trouve : $u_n = a^n\,u_0$.

Sinon, l'idée est de se ramener à ce dernier en cherchant une solution particulière : une suite constante $u_n = x$ pour tout n :

1. On résout donc l'équation :
$$x = a\,x + b,$$
on trouve : $x = \frac{b}{1-a}$ et l'on pose $v_n = u_n - x$.
2. On cherche la formule de récurrence vérifiée par la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$: comme
$$u_{n+1} = a\,u_n + b \quad \text{et} \quad x = a\,x + b,$$
on en déduit : $v_{n+1} = a\,v_n$.
3. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison a donc pour tout entier naturel n : $v_n = a^n\,v_0$. On en déduit :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = a^n\,(u_0 - x) + x.$$

Exemple(s) 82 :

82.1 Sa suite définie par :
$$u_0 = 1, \quad u_{n+1} = 2\,u_n + 1$$
admet pour formule explicite :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 2^{n+1} - 1$$

82.2 L'idée de ce paragraphe s'étend facilement à d'autres exemples. Par exemple, si l'on cherche une formule explicite pour la suite définie par :
$$v_0 = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} = 2\,v_n + n.$$
On peut chercher une suite particulière vérifiant l'équation de récurrence de la forme $p_n = a\,n+b$. En remplaçant dans l'équation, on trouve $a = b = -1$, c.a.d. $p_n = -(n+1)$. On en déduit que $v_n + (n+1)$ est géométrique de raison 2 donc :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = 2^n - n - 1.$$

7.1.2 Récurrence double, suites récurrentes linéaires d'ordre deux

Le raisonnement par récurrence double est une conséquence immédiate du raisonnement par récurrence simple ; son principe est le suivant : pour montrer que $P(n)$ est vraie pour tout n, il suffit de montrer que :

1. $P(0)$ et $P(1)$ sont vrais (*initialisation*)
2. et que si, pour tout entier N, la véracité de $P(N)$ et $P(N+1)$ entraîne celle de $P(N+2)$ (*hérédité*)

Exemple(s) 83 :

83.1 Une des applications essentielles de cette récurrence double sera pour nous de définir des suites. Par exemple, la suite de Fibonacci est définie par :

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \quad F_0 = 0, \quad F_1 = 1$$

on a alors $F_2 = 1$, $F_3 = 2$, $F_4 = 3$, $F_5 = 5$... Montrons que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad F_n \geqslant n - 1$$

(a) *initialisation :* Si $n = 2$: $F_2 = 1 \geqslant 1$, de même, si $n = 3$: $F_3 = 2 \geqslant 2$.

(b) *hérédité :* Soit $N \geqslant 2$ fixé et supposons la formule vraie pour N et $N+1$. Alors par la formule de récurrence puis hypothèse de récurrence :

$$F_{N+2} = F_{N+1} + F_N \geqslant N + N - 1 = 2\,N - 1 \geqslant N + 1.$$

On conclut alors que la formule est vraie pour tout $n \geqslant 2$ par principe de récurrence double. Comme elle est clairement vraie pour $n = 0$ et $n = 1$, elle est donc vraie pour tout entier naturel n.

83.2 Soit x un réel tel que $x + 1/x \in \mathbb{Z}$. Montrons que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x^n + \frac{1}{x^n} \in \mathbb{Z}.$$

(a) *initialisation :* le résultat est vrai pour $n = 0$ car $2 \in \mathbb{Z}$ et pour $n = 1$ par hypothèse

(b) *hérédité :* supposons le résultat vrai pour N et pour $N+1$. Alors :

$$\left(x^{N+1} + \frac{1}{x^{N+1}}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^{N+2} + \frac{1}{x^{N+2}} + x^N + \frac{1}{x^N}$$

donc par hypothèse de récurrence :

$$x^{N+2} + \frac{1}{x^{N+2}} = \left(x^{N+1} + \frac{1}{x^{N+1}}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right) - x^N + \frac{1}{x^N} \in \mathbb{Z}.$$

On conclut alors que la propriété est vraie pour tout n par principe de récurrence double.

Théorème 7.1.9 : *Soit $(p, q) \in \mathbb{C}^2$, et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite vérifiant la relation de récurrence :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} + p\,u_{n+1} + q\,u_n = 0.$$

Alors :

$$\exists (C, D) \in \mathbb{C}^2, \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = C\,a_n + D\,b_n$$

avec, si $\Delta = p^2 - 4\,q$ et on appelle équation caractéristique $z^2 + p\,z + q = 0$:

1. *Si $\Delta \neq 0$: λ_1 et λ_2 sont les deux solutions de l'équation caractéristique :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \lambda_1^n, \quad b_n = \lambda_2^n,$$

2. *si $\Delta = 0$ et λ est l'unique solution de l'équation caractéristique :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \lambda^n, \quad b_n = n\,\lambda^{n-1},$$

Démonstration :

1. Commençons par vérifier que si λ est une solution de l'équation caractéristique, alors $c_n = \lambda^n$ vérifie la relation de récurrence. En effet :
$$c_{n+2} + p\,c_{n+1} + q\,c_n = \underbrace{(\lambda^2 + p\,\lambda + q)}_{=0}\,\lambda^n = 0.$$
De plus, si $\delta = 0$ et $\lambda = -\frac{p}{2}$ est la solution de l'équation caractéristique, alors si $b_n = n\,\lambda^{n-1}$:
$$b_{n+2} + p\,b_{n+1} + q\,b_n = (n+2)\,\lambda^{n+1} + p\,(n+1)\,\lambda^n + q\,n\,\lambda^{n-1} = n\,\underbrace{(\lambda^2 + p\,\lambda + q)}_{=0}\,\lambda^{n-1} + \underbrace{2\,\lambda^2 + p\,\lambda}_{=0 \text{ car } \lambda = -\frac{p}{2}.} = 0.$$
2. Les deux calculs précédents montrent que dans les deux cas, les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifient la relation de récurrence. C'est-à-dire que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{array}{ll} a_{n+2} + p\,a_{n+1} + q\,a_n = 0 & (L_1) \\ b_{n+2} + p\,b_{n+1} + q\,b_n = 0 & (L_2) \end{array}$$
donc en effectuant l'opération $C\,(L_1) + D\,(L_2)$ toute suite de la forme $C\,a_n + D\,b_n$ vérifie la relation de récurrence.
3. Réciproquement, une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, procédons par analyse et synthèse. *Analyse* : si $v_n = C\,a_n + D\,b_n$ pour C et D deux complexes, alors :
$$\bullet \Delta \neq 0, \quad \begin{cases} C + D & = v_0 \\ C\,\lambda_1 + D\,\lambda_2 & = v_1 \end{cases} \iff \begin{cases} C & = \frac{v_1 - \lambda_1\,v_0}{\lambda_2 - \lambda_1} \\ D & = \frac{-v_1 + \lambda_2\,v_0}{\lambda_2 - \lambda_1} \end{cases} \quad \bullet\ \Delta = 0, \quad \begin{cases} C & = v_0 \\ C\,\lambda_1 + D & = v_1 \end{cases} \iff \begin{cases} C & = v_0 \\ D & = v_1 - \lambda\,v_0 \end{cases}.$$
Synthèse : si l'on prend pour C et D les deux valeurs trouvées, la suite $r_n = C\,a_n + D\,b_n$ vérifie $r_0 = v_0$, $r_1 = v_1$ et la relation de récurrence donc pour tout n, $v_n = r_n = C\,a_n + D\,b_n$.

■

Exemple(s) 84 :

84.1 Revenons sur la suite de Fibonacci, qui est définie par :
$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \quad F_0 = 0, \quad F_1 = 1$$
dans ce cas, l'équation caractéristique :
$$x^2 - x - 1 = 0$$
admet pour racines :
$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad \text{et} \quad \psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$
Il existe donc deux uniques constantes C et D telles que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad F_n = C\,\varphi^n + D\,\psi^n.$$
Reste à déterminer les constantes C et D ; les deux premières valeurs de la suite donnent :
$$\begin{cases} C + D = 0 \\ C\,\varphi + D\,\psi = 1 \end{cases}$$
On en déduit :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\,(\varphi^n - \psi^n).$$

84.2 Considérons la suite définie par :
$$\alpha_0 = 0, \alpha_1 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \alpha_{n+2} = -2\,\alpha_{n+1} - \alpha_n.$$
l'équation caractéristique s'écrit : $x^2 + 2\,x + 1 = (x+1)^2$. On en déduit qu'il existe des uniques constantes C et D telles que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \alpha_n = C\,n\,(-1)^{n-1} + D\,(-1)^n.$$
Pour déterminer C et D, on utilise les deux premières valeurs de la suite, qui donnent $D = 0$ et $C = 1$. On en déduit :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \alpha_n = n\,(-1)^{n-1}.$$

84.3 Considérons maintenant la suite définie par :

$$u_{n+2} + u_{n+1} + u_n = 0, \quad u_0 = 1, \quad u_1 = -1/2$$

l'équation caractéristique :

$$x^2 + x + 1 = 0$$

admet pour racines j et $\bar{j} = j^2$. On en déduit qu'il existe deux uniques constantes C et D telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = C\, j^n + D\, \bar{j}^n.$$

Pour déterminer les constantes C et D, on utilise les deux premières valeurs de la suite :

$$\begin{cases} C + D = 1 \\ C\, j + D\, \bar{j} = -1/2 \end{cases}$$

On en déduit $C = D = 1/2$ donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{1}{2}\,(j^n + \bar{j}^n) = \frac{1}{2}\,(e^{2\,i\,n\,\pi/3} + e^{-2\,i\,n\,\pi/3}) = \cos\left(\frac{2\,n\,\pi}{3}\right).$$

Remarque(s) 50 : Ce dernier exemple n'est pas un cas particulier. Dans le cas réel, le théorème se traduit sans aucun changement dans le cas où le discriminant est positif ou nul, à la différence près que, comme le suite est réelle, les constantes sont réelles. Dans le cas où le discriminant est strictement négatif, les solutions de l'équation caractéristique sont :

$$\lambda_1 = \frac{-p + i\,\sqrt{|\Delta|}}{2} = \rho\, e^{i\,\theta} \quad \text{et} \quad \lambda_2 = \overline{\lambda_1} = \rho\, e^{-i\,\theta}.$$

Puis, il existe deux constantes complexes C et D telle que, pour tout entier naturel n :

$$u_n = C\,\lambda_1^n + D\,\overline{\lambda_1}^n = \rho^n\,(C\, e^{i\,n\,\theta} + D\, e^{-i\,n\,\theta}).$$

Comme la suite u_n est réelle, il existe donc des constantes réelles A et B telle que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = A\,\rho^n\,\cos(n\,\theta) + B\,\rho^n\,\sin(n\,\theta).}$$

7.2 Quelques généralités sur les suites réelles

7.2.1 Monotonie, caractère borné

Les notions de monotonie se généralisent sans difficulté aux suites réelles : on dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est

1. constante si : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n$,
2. croissante si : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} \geqslant u_n$,
3. décroissante si : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} \leqslant u_n$,
4. strictement croissante si : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} > u_n$,
5. strictement décroissante si : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} < u_n$,
6. monotone si elle est croissante ou décroissante
7. strictement monotone si elle est strictement croissante ou strictement décroissante

Exemple(s) 85 :

85.1 Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $u_n = \lambda^n$. Alors, comme $u_{n+1} - u_n = \lambda^n \times (\lambda - 1)$, (u_n) est :

(a) croissante si et seulement si $\lambda \geqslant 1$,
(b) décroissante si et seulement si $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$,
(c) monotone si et seulement si $\lambda \geqslant 0$.

85.2 Pour de suites **à termes strictement positifs**, il peut être intéressant de considérer le quotient de deux termes consécutifs pour étudier la monotonie de la suite. Par exemple, si pour $n \geqslant 1$, $w_n = \frac{n!}{n^n}$ on a :

$$\frac{w_{n+1}}{w_n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n > 1,$$

donc en multipliant par le réel positif w_n, $w_{n+1} > w_n$ la suite est donc croissante.

85.3 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite croissante ; alors la suite définie par :

$$\forall n \geqslant 1, \quad v_n = \frac{u_1 + \cdots + u_n}{n}$$

est aussi croissante. En effet, pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$v_{n+1} - v_n = \frac{u_1 + \cdots + u_n + u_{n+1}}{n+1} - \frac{u_1 + \cdots + u_n}{n} = \frac{n \times u_{n+1} - (u_1 + \cdots + u_n)}{n \times (n+1)} \geqslant 0.$$

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On dit que :

1. majorée si : $\exists M \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leqslant M$
2. minorée si : $\exists m \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geqslant m$
3. bornée si elle est majorée et minorée, c'est-à-dire si : $\exists (M,m) \in \mathbb{R}^2, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad m \leqslant u_n \leqslant M$.

Propriété(s) 7.2.37 : Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée si et seulement si $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.

Démonstration : Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée alors,

$$\exists (M,m) \in \mathbb{R}^2, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad -|m| \leqslant m \leqslant u_n \leqslant M \leqslant |M|$$

on en déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leqslant \max(|M|, |m|),$$

la suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc majorée.
Réciproquement, si $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée :

$$\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N} \quad |u_n| \leqslant M \quad \text{on en déduit } \forall n \in \mathbb{N}, \quad -M \leqslant u_n \leqslant M;$$

la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc bornée.

■

Remarque(s) 51 : À partir de cette propriété, on peut facilement montrer que toute somme ou produit de suites bornées est bornée.

Exemple(s) 86 :

86.1 Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Alors les suites :

$$s_n = \sin(\theta \times n) \quad \text{et} \quad c_n = \cos(\theta \times n)$$

sont bornées. En effet, leurs valeurs absolues sont majorées par 1.

86.2 Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $u_n = \lambda^n$. Alors, comme $|u_n| = |\lambda|^n$ et $u_n = \lambda^n$, (u_n) est :

(a) bornée si et seulement si $-1 \leqslant \lambda \leqslant 1$,
(b) majorée si et seulement si $-1 \leqslant \lambda \leqslant 1$,
(c) minorée si et seulement si $-1 \leqslant \lambda$.

7.2.2 Propriétés à partir d'un certain rang

On dit qu'une suite admet une propriété **à partir d'un certain rang** si il existe un entier naturel n_0 tel que, pour tout $n \geqslant n_0$ u_n a cette propriété.

Exemple(s) 87 :

87.1 On dit qu'une suite est **stationnaire** si elle est constante à partir d'un certain rang, c'est-à-dire si :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0, \quad u_{n+1} = u_n.$$

Par exemple, la suite définie par :

$$u_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = 2\,u_n^2 - 1$$

est stationnaire car par une récurrence immédiate pour tout $n \geqslant 2$, $u_n = -1/2$.

87.2 Pour montrer les propriétés de majoration d'une suite, il suffit de les montrer à partir d'un certain rang. Montrons par exemple que, si une suite est majorée à partir d'un certain rang, elle est majorée.

Démonstration : Supposons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée à partir d'un certain rang. Alors :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \exists M \in \mathbb{R}, \forall n \geqslant n_0, \quad u_n \leqslant M.$$

Alors si l'on pose :

$$M' = \max(u_0, u_1, \ldots, u_{n_0-1}, M)$$

on a, pour tout entier naturel n : $u_n \leqslant M'$. La suite est donc majorée. ■

C'est encore vrai si l'on cherche à montrer que la suite est minorée ou bornée.

7.2.3 Convergence d'une suite réelle

Définition 7.2.29 : *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet $l \in \mathbb{R}$ comme limite lorsque n tend vers $+\infty$ si :*

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0, \quad |u_n - l| \leqslant \epsilon$$

On dit qu'une telle suite est convergente.

Remarque(s) 52 :

1. On écrit alors :
$$u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l \quad \text{ou} \quad \lim_{n\to+\infty} u_n = l$$
et l'on dira souvent que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers l lorsque n tend vers $+\infty$.
2. L'inégalité $|u_n - l| \leqslant \epsilon$ peut se ré-écrire :
$$-\epsilon + l \leqslant u_n \leqslant \epsilon + l$$
ce qui peut se comprendre « tout intervalle non vide centré en l contient toutes les valeurs de la suite à partir d'un certain rang ».
3. Cette définition s'étend aux limites $+\infty$ et $-\infty$ de la façon suivante :
   (a) On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$ si :
   $$\forall A \in \mathbb{R}_+, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0, \quad u_n \geqslant A.$$
   (b) On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$ si :
   $$\forall B \in \mathbb{R}_-, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0, \quad u_n \leqslant B.$$

Exemple(s) 88 :

88.1 La suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 1$$

tend vers 1 lorsque n tend vers $+\infty$. En effet :

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 = 0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0, \quad |u_n - 1| = 0 < \epsilon.$$

88.2 Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = n.$$

Alors v_n tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$. En effet, si $A \geqslant 0$ alors $n_0 = \max(\lfloor A \rfloor + 1, 0) \in \mathbb{N}$ tel que, pour $n \geqslant n_0$:

$$n \geqslant n_0 \geqslant A.$$

88.3 Soit $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad e_n = \exp(n).$$

Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} e_n = +\infty$. En effet, pour $A \in \mathbb{R}_+^*$ fixé, on prend : $n_0 = \max(\lfloor \ln(A) \rfloor + 1, 0)$ et on a, par croissance de la fonction exponentielle :

$$\forall n \geqslant n_0, \quad e^n \geqslant e^{n_0} \geqslant A$$

on montre de la même façon que $\ln(n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Bien souvent, on se **servira** de la convergence d'une suite pour prouver une propriété vérifiée par une suite **à partir d'un certain rang**.

Exemple(s) 89 :

89.1 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite qui converge vers $l > 0$. Montrons qu'à partir d'un certain rang, $u_n > 0$.

Démonstration : Prenons $\epsilon = \frac{l}{2} > 0$ dans la définition. Alors :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0, \quad |u_n - l| \leqslant \frac{l}{2} \Rightarrow u_n \geqslant \frac{l}{2} > 0.$$

■

Bien entendu, on a des résultats similaires pour des limites strictement négatives ou non nulles.

89.2 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente, alors cette suite est bornée (à partir d'un certain rang).

Démonstration : Comme nous l'avons vu dans le paragraphe précédent, il suffit de montrer que cette suite est bornée à partir d'un certain rang. De plus, en prenant $\epsilon = 1 > 0$ (par exemple) dans la définition :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0, \quad |u_n - l| \leqslant 1 \Rightarrow l - 1 \leqslant u_n \leqslant l + 1.$$

■

Ce dernier résultat est une propriété à connaître :

Propriété(s) 7.2.38 : Toute suite convergente est bornée.

Propriété(s) 7.2.39 : Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite lorsque n tend vers $+\infty$, alors cette limite est unique.

Démonstration : Traitons le cas des limites finies. Les autres sont similaires.
Soit $(l, l') \in \mathbb{R}^2$. Supposons que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$ et $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l'$. Supposons par l'absurde que $l \neq l'$. Quitte à échanger les rôles de l et l', on peut supposer $l > l'$. En prenant $\epsilon = \frac{l-l'}{3} > 0$ dans la définition, comme $2\,\epsilon < l - l'$, on a :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0, \quad u_n \leqslant \epsilon + l' < l - \epsilon \leqslant u_n.$$

Absurde ! Donc $l = l'$.

■

7.2.4 Suites extraites

Définition 7.2.30 : *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite. On appelle suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ toute suite définie par :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = u_{\varphi(n)}$$

où $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est fonction strictement croissante.

Remarque(s) 53 : On dit souvent qu'une suite extraite est « formée de certains termes de la suite (u_n) ».

Exemple(s) 90 :

90.1 Les exemples les plus utilisés de suites extraites sont les suites :

$$(u_{2\,n})_{n\in\mathbb{N}}, \quad (u_{2\,n+1})_{n\in\mathbb{N}}, \quad (u_{3\,n})_{n\in\mathbb{N}}, \quad (u_{3\,n+1})_{n\in\mathbb{N}}, \quad (u_{3\,n+2})_{n\in\mathbb{N}}.$$

90.2 Si l'on considère la suite définie par la formule $u_n = (-2)^n$, les suites extraites $(u_{2\,n})$ et $(u_{2\,n+1})$ ont pour formules :

$$u_{2\,n} = (-2)^{2\,n} = 4^n \quad \text{et} \quad u_{2\,n+1} = (-2)^{2\,n+1} = -2\,4^n.$$

Il s'agit dans les deux cas de suites géométriques de raison 4.

90.3 On peut se servir des suites extraites pour contredire certaines affirmations, il est par exemple clair que si une suite est bornée, majorée ou minorée, alors toutes ses suites extraites aussi. Par exemple, la suite définie par $u_n = (-1)^n\,n$ n'est ni majorée ni minorée car :

$$u_{2\,n} = 2\,n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty \quad \text{et} \quad u_{2\,n+1} = -(2\,n+1) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty.$$

Propriété(s) 7.2.40 : Toute suite extraite d'une suite convergente converge vers la même limite.

Démonstration : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite qui converge vers une limite l et soit $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ une suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Commençons par montrer par récurrence que comme $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est strictement croissante alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \varphi(n) \geqslant n.$$

1. *initialisation :* $\varphi(0) \in \mathbb{N}$ donc $\varphi(0) \geqslant 0$,
2. *hérédité :* soit N un entier naturel fixé. Supposons que $\varphi(N) \geqslant N$. Alors $N+1 > N$ donc comme φ est strictement croissante :
$$\varphi(N+1) > \varphi(N) \geqslant N$$
mais $\varphi(N+1)$ est un entier naturel, donc $\varphi(N+1) \geqslant N+1$.

Par principe de récurrence, la formule est donc exacte. Montrons maintenant que $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l. Soit $\epsilon > 0$. Par définition, comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0, \quad |u_n - l| \leqslant \epsilon.$$

Mais alors, si $n \geqslant n_0$, par ce qu'on vient de prouver, $\varphi(n) \geqslant n \geqslant n_0$ donc :

$$|u_{\varphi(n)} - l| \leqslant \epsilon.$$

■

Remarque(s) 54 : 1. La même preuve nous donne sans difficulté que si (u_n) tend vers $+\infty$ ou $-\infty$ alors toutes ses suites extraites aussi.

Cette propriété sert à montrer facilement qu'une suite n'est pas convergente, en effet :

Pour montrer qu'une suite est divergente, il suffit d'exhiber deux de ses suites extraites qui ont une limite différente.

Exemple(s) 91 :

91.1 La suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = (-1)^n$$

est divergente ; en effet :

$$u_{2\,n} = 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 \quad \text{et} \quad u_{2\,n+1} = -1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -1.$$

91.2 La suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{n}{3} - \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$$

est divergente. En effet,

$$u_{3\,n} = 0 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{et} \quad u_{3\,n+1} = n + \frac{1}{3} - \left\lfloor n + \frac{1}{3} \right\rfloor = \frac{1}{3} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{3}.$$

91.3 La suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 2^n + (-2)^n \sin\left(n\,\frac{\pi}{2}\right)$$

est divergente. En effet,

$$u_{2\,n} = 2^{2\,n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty \quad \text{et} \quad u_{4\,n+1} = 0 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

7.2.5 Théorèmes généraux sur les limites

Propriété(s) 7.2.41 : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites admettant des limites (éventuellement infinies) lorsque n tend vers $+\infty$. Alors :

1. $u_n + v_n$ admet pour limite :

$v_n \setminus u_n$	$\lambda \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$
$\mu \in \mathbb{R}$	$\lambda + \mu$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	FI
$-\infty$	$-\infty$	FI	$-\infty$

2. $u_n \times v_n$ admet pour limite :

$v_n \setminus u_n$	$\lambda \in \mathbb{R}_+^*$	$\lambda \in \mathbb{R}_-^*$	$+\infty$	$-\infty$	0
$\mu \in \mathbb{R}_+^*$	$\lambda \times \mu$	$\lambda \times \mu$	$+\infty$	$-\infty$	0
$\mu \in \mathbb{R}_+^*$	$\lambda \times \mu$	$\lambda \times \mu$	$-\infty$	$+\infty$	0
$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	FI
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI
0	0	0	FI	FI	0

3. Si de plus, v_n ne s'annule pas à partir d'un certain rang, u_n/v_n admet pour limite :

$v_n \setminus u_n$	$\lambda \in \mathbb{R}_+^*$	$\lambda \in \mathbb{R}_-^*$	$+\infty$	$-\infty$	0
$\mu \in \mathbb{R}_+^*$	$\frac{\lambda}{\mu}$	$\frac{\lambda}{\mu}$	$+\infty$	$-\infty$	0
$\mu \in \mathbb{R}_-^*$	$\frac{\lambda}{\mu}$	$\frac{\lambda}{\mu}$	$-\infty$	$+\infty$	0
$\pm\infty$	0	0	FI	FI	0
0^+	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	FI
0^-	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI

Démonstration : Nous allons montrer l'un des points de chaque propriété. Les autres se traitent de façon analogue.

1. Montrons le premier point de la première propriété. Soit $\epsilon > 0$ fixé. Par définition :
$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0,\ |u_n - l| \leqslant \frac{\epsilon}{2} \quad \text{et} \quad \exists n_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_1,\ |v_n - l'| \leqslant \frac{\epsilon}{2}$$
Pour que ces deux propriétés soient vraies en même temps, on prend $n \geqslant n_2 = \max(n_0, n_1)$. Alors :
$$|(u_n + v_n) - (l + l')| \leqslant |u_n - l| + |v_n - l'| \leqslant \epsilon.$$
On en déduit que $u_n + v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l + l'$.
2. Supposons maintenant que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ et que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0. Alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc est bornée donc $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée, c'est-à-dire :
$$\exists M \in \mathbb{R}_+^*, \forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leqslant M.$$
Fixons maintenant $\epsilon > 0$. En prenant « $\epsilon = \epsilon/M$ » dans la définition, on a :
$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0, \quad |v_n| \leqslant \frac{\epsilon}{M}.$$
Il suffit alors de multiplier les deux inégalités (constituées de réels positifs) pour conclure :
$$\forall n \geqslant n_0, \quad |u_n \times v_n - 0| = |u_n| \times |v_n| \leqslant \frac{\epsilon}{M} \times M = \epsilon.$$
On en déduit que $u_n \times v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
3. Terminons en supposant que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ et que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0^+. Alors comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $\lambda > 0$, par la remarque précédente :
$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0, \quad u_n \geqslant \lambda/2.$$
Enfin, comme $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0^+, si $M \in \mathbb{R}_+^*$ est fixé, par définition :
$$\exists n_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_1, \quad 0 < v_n \leqslant \frac{\lambda/2}{M}.$$
Il reste alors à multiplier les deux inégalités, constituées de réels positifs, pour conclure :
$$\forall n \geqslant \max(n_0, n_1), \quad \frac{u_n}{v_n} \geqslant \lambda/2 \times \frac{M}{\lambda/2} = M.$$
On en déduit que $u_n \times v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

■

Exemple(s) 92 :

92.1 Considérons la suite réelle définie par :
$$u_0 = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = -u_n^2 - 1.$$
Montrons par l'absurde que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas. Si elle convergeait vers l, alors en passant à la limite dans l'égalité la définissant : $l^2 + l + 1 = 0$. Mais cette équation a un discriminant strictement négatif, elle n'a donc pas de solution réelle. Absurde !

92.2 Montrons qu'aucune des suites définies par :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \cos(n) \quad \text{et} \quad v_n = \sin(n)$$
ne converge. Pour ceci, commençons par remarquer que :
$$\cos(n+1) + \cos(n-1) = 2\cos(1)\cos(n)$$
donc si (u_n) converge, alors sa limite vaut 0 car $\cos(1) \neq 1$. Mais
$$\cos(n+1) - \cos(n-1) = -2\sin(n)\sin(1),$$
donc comme $\sin(1) \neq 0$, (v_n) converge vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. Mais enfin, l'égalité
$$\cos^2(n) + \sin^2(n) = 1$$
implique en passant à la limite $0 = 1$. Absurde !

7.2.6 Théorèmes de comparaison

Propriété(s) 7.2.42 : (*Passage à la limite dans les inégalités.*) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites. On suppose que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$, $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l'$ et que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leqslant v_n. \quad \text{Alors} \quad l \leqslant l'.$$

Démonstration : Supposons par l'absurde que $l > l'$. Alors la suite $(u_n - v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet pour limite $l - l' > 0$. Elle est donc strictement positive à partir d'un certain rang, ce qui implique $u_n > v_n$. Absurde !

■

Remarque(s) 55 :

1. Attention ! Cette propriété n'est vraie que avec des inégalités larges. En effet,

$$\forall n \geqslant 1, \quad \frac{1}{n} > 0 \quad \text{mais} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0 \leqslant 0.$$

2. Dans cette propriété, **il faut** que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admettent des limites.

Exemple(s) 93 :

93.1 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite du segment $[a, b]$. Supposons que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$. Alors $l \in [a, b]$. En effet, il suffit de passer à la limite dans les inégalités : $a \leqslant u_n \leqslant b$.

93.2 Lorsque la suite est définie par :

$$u_0 \in [a, b] \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n)$$

lorsque l'intervalle $[a, b]$ est **stable** par f, c'est-à-dire :

$$\forall x \in [a, b], \quad f(x) \in [a, b],$$

alors comme dans l'exemple précédent $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite du segment $[a, b]$.

Démonstration : On procède par récurrence. Pour $n = 0$, $u_0 \in [a, b]$. Soit maintenant $N \in \mathbb{N}$ fixé et supposons que $u_N \in [a, b]$. Alors en choisissant $x = u_N$ dans la définition de la stabilité, $u_{n+1} = f(u_N) \in [a, b]$. L'hérédité est donc vraie ce qui implique par principe de récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in [a, b].$$

■

En particulier, si u_n converge vers l, $l \in [a, b]$.

93.3 La limite d'une suite positive est positive ; celle d'une suite négative est négative.

Propriété(s) 7.2.43 : Supposons que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant v_n$ alors $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Démonstration : Soit $A \in \mathbb{R}$. Alors par définition,

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0, \quad u_n \geqslant A$$

mais alors, $v_n \geqslant u_n \geqslant A$ donc $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

■

Remarque(s) 56 :

1. Sauriez-vous énoncer et prouver une propriété analogue pour $-\infty$?
2. La force de cette propriété est qu'elle permet de **prouver** que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite lorsque n tend vers $+\infty$. La valeur de cette limite est un bonus agréable...

Exemple(s) 94 :

94.1 La suite $u_n = (2+\sin(n)) \times n$ tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$. En effet :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (2+\sin(n)) \times n \geqslant n$$

et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

94.2 On considère la suite définie par :

$$u_0 = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \sqrt{n+u_n}.$$

Alors, comme une racine est toujours positive, pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 0$ donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} \geqslant \sqrt{n}$$

par théorème de comparaison, on en déduit que u_n tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$.

94.3 On considère la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n \geqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}$$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

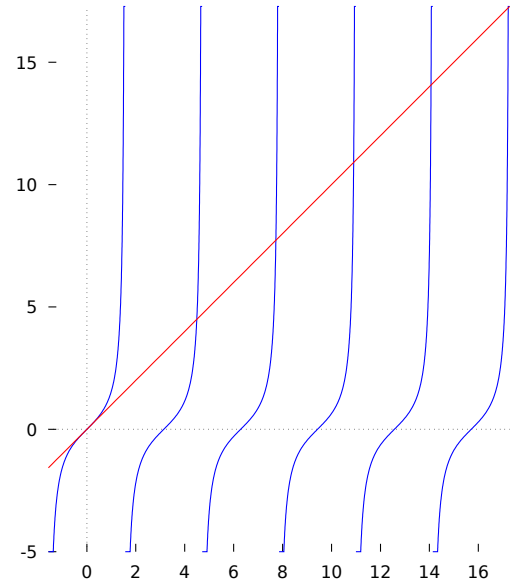
94.4 Par une étude de fonctions, pour tout entier naturel n, la fonction $f(x) = \tan(x) - x$ est bijective sur $I_n =]-\pi/2 + n\,\pi, \pi/2 + n\,\pi[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Elle s'annule donc en un unique point x_n :

$$\exists! x_n \in I_n, \quad \tan(x_n) = x_n.$$

Par définition, pour tout entier naturel n :

$$x_n \geqslant -\frac{\pi}{2} + n\,\pi \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

donc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$.



Théorème 7.2.10 (dit des gendarmes) : *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites qui tendent vers le même réel l. On suppose que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leqslant v_n \leqslant w_n.$$

Alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l lorsque n tend vers $+\infty$.

Démonstration : Soit $\epsilon > 0$. Comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendent vers le même réel l,

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0, \quad |u_n - l| \leqslant \epsilon \quad \text{et} \quad \exists n_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_1, \quad |v_n - l| \leqslant \epsilon.$$

En particulier, pour $n \geqslant n_2 = \max(n_0, n_1)$:

$$-\epsilon \leqslant u_n - l \leqslant v_n - l \leqslant w_n - l \leqslant \epsilon$$

c'est-à-dire $|v_n - l| \leqslant \epsilon$. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc vers l lorsque n tend vers $+\infty$.

■

Exemple(s) 95 :

95.1 Considérons la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \frac{\sin(n)}{n}$$

Alors, pour tout n non nul :

$$-\frac{1}{n} \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n}$$

donc par le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

95.2 On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{1}{2}\sin(u_n).$$

Remarquons que pour tout n, $0 \leqslant u_n \leqslant 1$. De plus, par l'inégalité « géométrique » de la fonction sinus,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}\, u_n$$

donc par une rapide récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{2^n} \times u_0 = \frac{1}{2^n}.$$

Le théorème des gendarmes permet alors de conclure : a suite (u_n) tend vers 0.

95.3 On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2 + k^2}.$$

Alors :

$$0 \leqslant S_n \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2 + 1^2} = \frac{n}{n^2 + 1}.$$

donc par le théorème des gendarmes, S_n tend vers 0.

95.4 On considère maintenant pour $n \geqslant 1$ 'équation :

$$x^3 + n\,x - 1 = 0$$

alors, la fonction $f_n(x) = x^3 + n\,x - 1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n'(x) = 3\,x^2 + n > 0$$

La fonction f_n est donc strictement croissante donc injective et elle admet de plus $f_n(0) = -1$ et $f_n(1/n) = 1/n^3 > 0$. Donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists! x_n \in [0, 1/n], \qquad x_n^3 + n\,x_n - 1 = 0.$$

On en déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leqslant x_n \leqslant \frac{1}{n}.$$

Donc par le théorème des gendarmes : x_n tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

7.3 Quelques généralités sur $\mathbb{R}$.

7.3.1 Majorants, minorants, bornes supérieures, inférieures

Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. Comme lorsque l'on a travaillé avec les fonctions réelles à valeurs réelles, On dit que :

Définition 7.3.31 :
1. *Le réel M est un majorant de A si : $\forall x \in A, \quad x \leqslant M$,*
2. *Le réel m est un minorant de A si : $\forall x \in A, \quad x \geqslant m$,*
3. *On dit que A est majoré si il admet un majorant, minoré si il admet un minorant et borné si il admet un majorant et un minorant,*
4. *Le réel M_0 est un maximum de A si c'est un majorant de A et si $M_0 \in A$,*
5. *Le réel m_0 est un minimum de A si c'est un minorant de A et si $m_0 \in A$.*

Remarque(s) 57 :
1. Comme dans le cas des fonctions, si un ensemble admet un maximum ou un minimum, celui-ci est unique. il est donc légitime d'écrire :
$$\max(A) \quad \text{resp.} \quad \min(A)$$
pour le maximum (resp. le minimum) de l'ensemble A si il existe.
2. Certains ensembles n'ont ni maximum ni minimum, comme $\mathbb{Z}$, l'ensemble des entiers relatifs, il faut donc toujours prouver qu'un tel élément existe avant de le considérer.

Exemple(s) 96 :

96.1 Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ de la forme :
$$I =]a, b], \quad (a, b) \in \mathbb{R}^2$$
alors, I est minoré (par $a-1$) et majoré (par $b+1$), il admet un maximum : $\max(I) = b$ mais pas de minimum. Ce résultat se généralise sans difficulté à tous types d'intervalles.

96.2 Cependant, **tout ensemble fini admet un maximum et un minimum.** Ceci implique en particulier que tous les ensembles non vides bornés de $\mathbb{Z}$ admettent toujours un maximum et un minimum.

Définition 7.3.32 : *Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. Notons $\mathcal{M}_+$ l'ensemble des majorants de A et $\mathcal{M}_-$ l'ensemble des minorants de A :*
$$\mathcal{M}_+ = \{M \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in A, \quad x \leqslant M\}, \quad \mathcal{M}_- = \{m \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in A, \quad m \leqslant x\}$$
1. *On dit que A admet une borne supérieure si $\mathcal{M}_+$ admet un minimum. On pose alors* $\sup(A) = \min(\mathcal{M}_+)$.
2. *On dit que A admet une borne inférieure si $\mathcal{M}_-$ admet un maximum. On pose alors* $\inf(A) = \max(\mathcal{M}_-)$.

Remarque(s) 58 :
1. Pour retenir facilement cette définition, on dit souvent que la borne supérieure est, si elle existe : «le plus petit des majorants» et la borne inférieure est, si elle existe : «le plus grand des minorants».
2. On peut légèrement généraliser cette définition, si A est non vide, non majoré on dit que $\sup(A) = +\infty$ et si A est non vide, non minoré, $\inf(A) = -\infty$.

Exemple(s) 97 :

97.1 Soit a et b deux réels. Considérons l'intervalle : $I = [a, b[$. Alors l'ensemble de ses majorants est : $\mathcal{M}_+ = [b, +\infty[$ et l'ensemble des minorants : $\mathcal{M}_- =]-\infty, a]$. Le premier admet un minimum : b et le deuxième un maximum : a. L'intervalle I admet donc une borne supérieure et une borne inférieure :
$$\sup(I) = b, \quad \inf(I) = a.$$
Ceci se généralise aisément à n'importe quel intervalle.

Dans la suite, on **admettra** le résultat suivant [1]

> Un sous-ensemble I de $\mathbb{R}$ est un intervalle si et seulement si pour tout $a \leqslant b$ éléments de I, $[a,b] \subset I$.

Théorème 7.3.11 (de la borne supérieure) : *Soit A un sous-ensemble non vide et majoré de $\mathbb{R}$. Alors A possède une borne supérieure. De même, si A est non vide et minoré, il possède une borne inférieure.*

Démonstration : Supposons A non vide, majoré. Alors, si l'on note $\mathcal{M}_+$ l'ensemble de ses majorants, c'est un ensemble non vide (car A est majoré), minoré (car A est non vide). De plus, si $a \leqslant b$ sont deux majorants de A, tout réels de l'intervalle $[a,b]$ est également un majorant de A. L'ensemble $\mathcal{M}_+$ est donc un intervalle de $\mathbb{R}$. Notons $b = \text{Inf}(\mathcal{M}_+)$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b+1/2^n$ est un majorant de A. Donc par passage à la limite dans les inégalités, b est un majorant de A. Donc $b = \min(\mathcal{M}_+)$. L'ensemble A admet une borne supérieure.

■

7.4 Théorèmes avancés de convergence

7.4.1 Théorème de la limite monotone

Théorème 7.4.12 (de la limite monotone) : *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante. Alors :*

1. *Si elle est majorée, elle converge.*
2. *Sinon, elle tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$.*

Démonstration :

1. Soit (u_n) une suite croissante non majorée. Soit $A \in \mathbb{R}$. Comme (u_n) n'est pas majorée, il existe un entier n_0 tel que $u_{n_0} > A$, mais alors, comme (u_n) est croissante, pour tout entier supérieur ou égal à n_0 ;

$$u_n \geqslant u_{n_0} \geqslant A.$$

   La suite (u_n) tend donc vers $+\infty$.

2. Soit (u_n) une suite croissante et majorée. Alors l'ensemble

$$A = \{u_n, \quad n \in \mathbb{N}\}$$

   est non vide, majoré. Il admet donc une borne supérieure, que l'on appelle l. Soit $\epsilon > 0$; par définition de la borne supérieure, $l - \epsilon < l$ donc ce n'est pas un majorant de A. Il existe donc $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$u_{n_0} \geqslant l - \epsilon$$

   Comme la suite (u_n) est croissante, pour tout $n \geqslant n_0$:

$$u_n \geqslant u_{n_0} \geqslant l - \epsilon$$

   mais l est un majorant de A donc $u_n \leqslant l$. On en déduit $0 \leqslant l - u_n \leqslant \epsilon$ donc $|u_n - l| \leqslant \epsilon$. La suite (u_n) converge donc.

■

Remarque(s) 59 :

1. Bien entendu, on peut énoncer un théorème analogue pour une suite décroissante. Si elle est minorée, elle converge et sinon, elle tend vers $-\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$.
2. Notez que dans tous les cas, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $\sup(\{u_n, \quad n \in \mathbb{N}\})$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Exemple(s) 98 :

1. qui est très difficile à prouver et même impossible sans construire « proprement » $\mathbb{R}$.

98.1 On définit :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Alors, $(H_n)_{n\in\mathbb{N}*}$ est croissante : pour tout entier naturel n, $H_{n+1} - H_n = \frac{1}{n+1} \geqslant 0$. Donc, par les théorèmes précédents, $(H_n)_{n\in\mathbb{N}*}$ converge ou tend vers $+\infty$. Mais :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad H_{2\,n} - H_n = \sum_{k=n+1}^{2\,n} \frac{1}{k} \geqslant \sum_{k=n+1}^{2\,n} \frac{1}{2\,n} = \frac{1}{2}.$$

Donc, si $(H_n)_{n\in\mathbb{N}*}$ convergeait vers l, par passage à la limite dans cette inégalité : $0 = l - l \geqslant 1/2$. Absurde ! Donc :

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

98.2 On considère la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = H_n - \ln(n)$$

On remarque que, pour $n \geqslant 2$ par l'inégalité « géométrique » du logarithme :

$$u_n - u_{n-1} = \frac{1}{n} - \ln(n) + \ln(n-1) = \frac{1}{n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \leqslant \frac{1}{n} - \frac{1}{n} = 0.$$

La suite (u_n) est donc décroissante. De plus, toujours par l'inégalité géométrique du logarithme : pour tout entier k supérieur ou égal à 1, $\frac{1}{k} \geqslant \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \ln(k+1) - \ln(k)$, donc :

$$u_n \geqslant \sum_{k=1}^{n} (\ln(k+1) - \ln(k)) - \ln(n) = \ln(n+1) - \ln(n) \geqslant 0.$$

La suite (u_n) est donc décroissante, minorée par 0, elle converge donc. On note [2] :

$$\gamma = \lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n) \right).$$

7.4.2 Application aux suites récurrentes

Pour étudier une suite définie par :

$$u_0 \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n),$$

où f est une fonction dérivable on peut :

1. Étudier la fonction f et en effectuer la représentation graphique. Y ajouter la droite $y = x$.
2. Étudier le signe de la fonction définie par $g(x) = f(x) - x$.

Le dessin fait nous permet de conjecturer des résultats sur des limites éventuelles de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et ces deux études se traduisent par des propriétés qui nous permettent de prouver les conjectures faites. Plus précisément :

Propriété :	Quantification pour u_n :	Lien avec f et g :
I est stable	$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in I$	$f(I) \subset I$
$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante	$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \geqslant u_n$	$g(x) \geqslant 0$
$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante	$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \leqslant u_n$	$g(x) \leqslant 0$
l est une limite potentielle de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$	$l = f(l)$	$g(l) = 0$

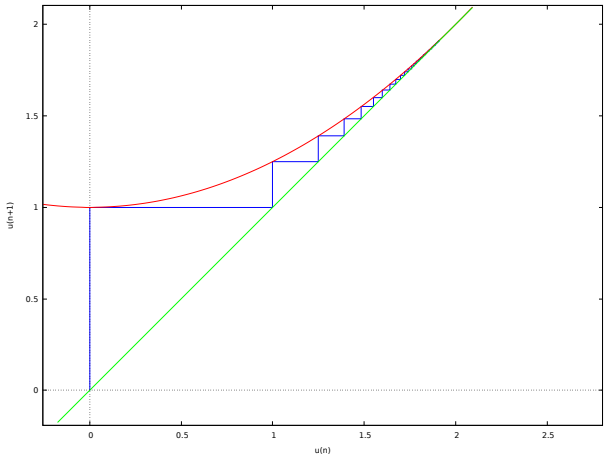
Exemple(s) 99 :

99.1 On considère maintenant la suite définie par :

$$u_0 \in [0, 2], \quad u_{n+1} = \frac{u_n^2}{4} + 1$$

Montrons que u_n tend vers 2. Commençons par remarquer que $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f(x) = \frac{x^2}{4} + 1$.

2. On ne sait que peu de choses de la constante γ, appelée constante d'Euler–Mascheroni : par exemple, on ne sait pas si il s'agit d'un rationnel ou non.



(a) la fonction f est clairement croissante et $f(0) = 1 \geqslant 0$, $f(1) = \frac{5}{4} \leqslant 2$. L'intervalle $[0, 2]$ est donc **stable par** f, c'est-à-dire que si $x \in [0, 2]$, $f(x) \in [0, 2]$. On en déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in [0, 2]$$

(b) Étudions maintenant le signe de $g(x) = f(x) - x$ pour $x \in [0, 2]$. Ici :

$$g(x) = \frac{x^2}{4} + 1 - x = \frac{x^2 - 4\,x + 4}{4} = \frac{(x-2)^2}{4} \geqslant 0.$$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc croissante.

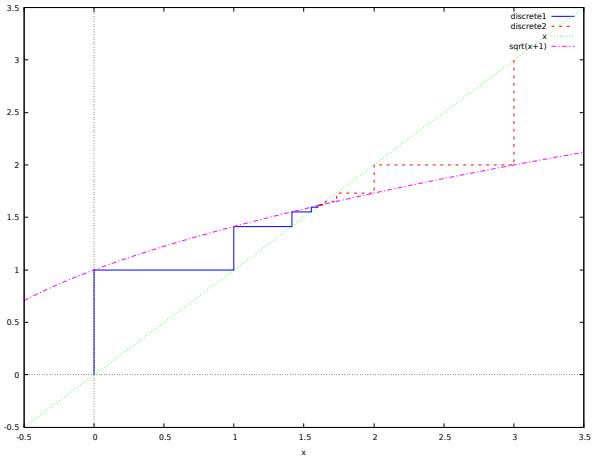
(c) Le suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, majorée par 2, elle converge donc. Notons $l \in [0, 2]$ sa limite. En passant à la limite dans l'expression $u_{n+1} = \frac{u_n^2}{4} + 1$, on trouve $l = f(l)$. Il reste à résoudre l'équation pour trouver l :

$$l \in [0, 2], \quad f(l) - l = 0 \iff \frac{(l-2)^2}{4} = 0 \iff l = 2.$$

Finalement, $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2$.

99.2 Considérons maintenant la suite définie par :

$$u_0 \in [-1, +\infty[, \quad u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1}.$$



(a) Étudions le signe de $g(x) = f(x) - x$. On a [3]

$$\forall x \in [-1, +\infty[, \quad \sqrt{x+1} - x \leqslant 0 \iff x + 1 \leqslant x^2 \iff x \in [\varphi, +\infty[\,.$$

(b) La fonction f est croissante sur les intervalles $[-1, \varphi]$ et sur $[\varphi, +\infty[$. De plus, $f(-1) = 0$ et $f(\varphi) = \varphi$. On a donc deux intervalles stables :

$$[-1, \varphi] \quad \text{et} \quad [\varphi, +\infty[.$$

On en déduit deux cas :

3. On rappelle que $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Pour obtenir la dernière équivalence, il faut faire deux cas, suivant si x est positif ou négatif...

i. si $u_0 \in [-1,\varphi]$, pour tout n, $u_n \in [-1,\varphi]$ et (u_n) est croissante. Elle est croissante majorée donc convergente. Notons $l \in [-1,\varphi]$ sa limite. En passant à la limite dans la formule qui la définit, on a alors :

$$l = g(l) \Longrightarrow l = \varphi$$

donc dans ce cas, $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \varphi$.

ii. si $u_0 \in [\varphi,+\infty[$, pour tout n, $u_n \in [\varphi,+\infty[$ et (u_n) est décroissante. Elle est décroissante minorée donc convergente. Notons $l \in [\varphi,+\infty[$ sa limite. En passant à la limite dans la formule qui la définit, on a alors :

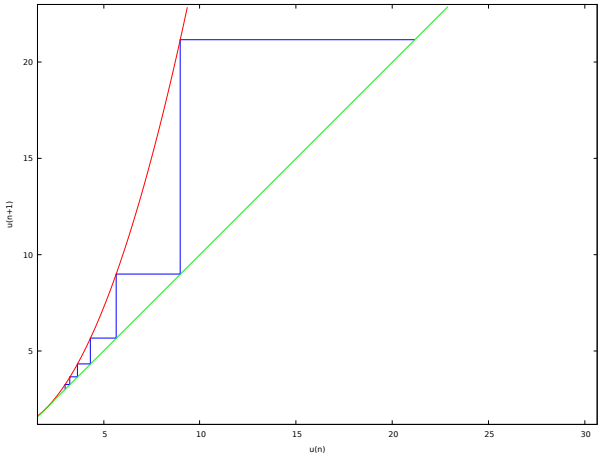
$$l = g(l) \Longrightarrow l = \varphi$$

donc dans ce cas, $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \varphi$.

On en conclut : dans tous les cas : $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \varphi$.

99.3 Soit (u_n) une suite vérifiant :

$$u_0 > 2, \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{u_n^2}{4} + 1.$$



Montrons que u_n tend vers $+\infty$. Pour ceci, on reprend les résultats de l'exemple précédent ; on a $u_{n+1} = f(u_n)$ donc :

(a) f est strictement croissante sur $]2,+\infty[$, $f(2) = 2$ donc l'intervalle $]2,+\infty[$ est stable par f. On en déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in]2,+\infty[.$$

(b) $f(x) - x \geqslant 0$ sur $]2,+\infty[$ donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

(c) par la propriété, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite l ou tend vers $+\infty$; en éliminant la première possibilité, nous aurons la deuxième. Supposons par l'absurde que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite l. Alors en passant à la limite dans l'égalité : $u_{n+1} = \frac{u_n^2}{4} + 1$, on a :

$$l = f(l) \Longrightarrow l = 2 \quad \text{ou} \quad l = -2$$

ce qui est impossible ! En effet, $u_n \geqslant u_0 > 2$ donc en passant à la limite lorsque n tend vers $+\infty$, $l \geqslant u_0 > 2$. On en déduit $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

On utilise parfois les suites extraites pour montrer qu'une telle suite converge. Par exemple, on a :

Si $(u_{2\,n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2\,n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ **convergent vers la même limite** l, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge aussi vers l.

Démonstration : Soit $\epsilon > 0$. Alors :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0, \quad |u_{2\,n} - l| \leqslant \epsilon \quad \text{et} \quad \exists n_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_1, \quad |u_{2\,n+1} - l| \leqslant \epsilon.$$

Donc, si $n \geqslant \max(2\,n_0, 2\,n_1 + 1)$ il y a deux cas :

1. Si n est pair, $n = 2\,k$ et alors $k \geqslant n_0$ et donc $|u_n - l| = |u_{2\,k} - l| \leqslant \epsilon$
2. Si n est pair, $n = 2\,k + 1$ et alors $k \geqslant n_1$ et donc $|u_n - l| = |u_{2\,k+1} - l| \leqslant \epsilon$

dans tous les cas, $|u_n - l| \leqslant \epsilon$.

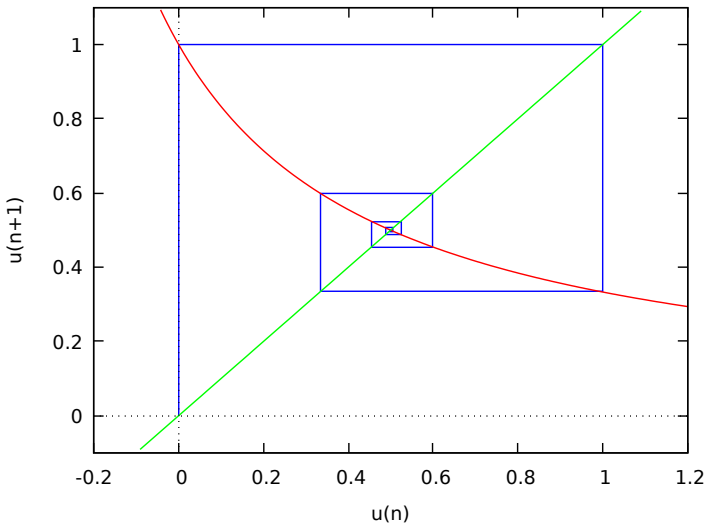
■

Exemple(s) 100 :

100.1 Considérons la suite définie par :

$$u_0 = 0, \quad u_{n+1} = \frac{1}{1+2\,u_n}$$

Commençons par remarquer que si l'on pose $f(x) = \frac{1}{1+2\,x}$, l'intervalle $[0,1]$ est stable par f. Faisons maintenant une dessin :



...qui nous suggère d'étudier les suites $(u_{2\,n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2\,n+1})_{n\in\mathbb{N}}$. Remarquons que, si $v_n = u_{2\,n}$ et $w_n = u_{2\,n+1}$ alors :

$$v_{n+1} = f(f(v_n)) \quad \text{et} \quad w_{n+1} = f(f(w_n))$$

On est alors ramené qu cas précédent pour la fonction $f_1(x) = f(f(x))$. Comme f est décroissante, f_1 est croissante et comme $[0,1]$ est stable par f, il l'est aussi par f_1. De plus :

$$g(x) = f_1(x) - x = \frac{1}{2\,\frac{1}{2\,x+1}+1} - x = \frac{-2\,x^2 - x + 1}{2\,x+3}.$$

La fonction g est donc positive sur $[0,1/2]$, négative sur $[1/2,1]$ et s'annule en $x = 1/2$. De plus, ces intervalles sont stables par f_1 car f_1 est croissante. Donc :

(a) Comme $u_0 = 0 \in [1,1/2]$, $(u_{2\,n})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, majorée par $1/2$ donc elle converge. Et sa limite est un point d'annulation de g donc elle converge vers $1/2$.

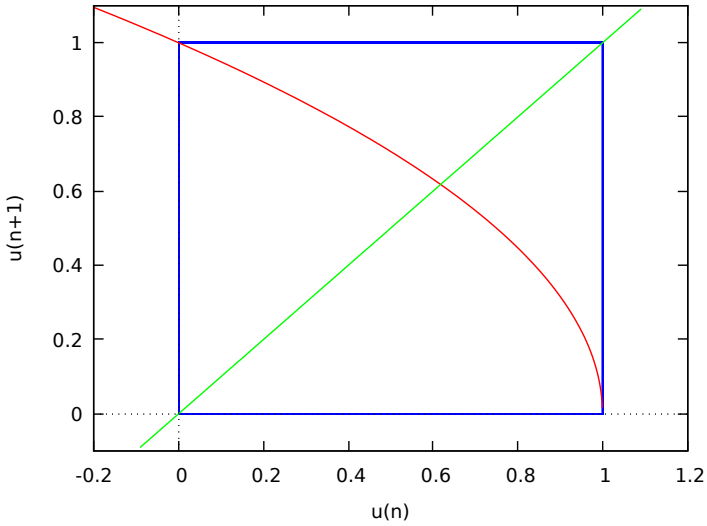
(b) Comme $u_1 = f(u_0) = 1 \in [1/2,1]$, $(u_{2\,n})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, minorée par $1/2$ donc elle converge. Et sa limite est un point d'annulation de g donc elle converge vers $1/2$.

Finalement, $(u_{2\,n})$ et $(u_{2\,n+1})$ admettent la même limite : $\frac{1}{2}$, on en déduit :

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}.$$

100.2 Considérons la suite définie par :

$$u_0 = 0, \quad u_{n+1} = \sqrt{1-u_n}$$



alors :

$$u_{2\,n} = 0 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{et} \quad u_{2\,n+1} = 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge donc pas (on parle de 2-cycle).

Remarque(s) 60 :

1. Fondamentalement, la différence entre ces deux exemples et les précédents est que, dans ce cas, le fonction f est décroissante, alors que dans les premiers, elle était croissante sur l'intervalle stable considéré.
2. Le fait que les suites $(u_{2\,n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2\,n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones dans ce cas est général, mais même si cette information est intéressante, elle ne permet pas de conclure : elles pourraient converger vers des limites différentes (comme dans le deuxième exemple).

7.4.3 Un peu de poésie

Les deux théorèmes de ce paragraphe sont hors programme.

Théorème 7.4.13 (du soleil levant) : *Toute suite réelle admet une sous-suite monotone.*

Démonstration : (idée de la) On considère le graphe de la suite dans $\mathbb{N}\times\mathbb{R}$, que l'on imagine éclairé par un soleil rasant par la droite. On considère l'ensemble des « sommets » qui voient le soleil [4]. Si ils sont infinis, ils définissent une suite extraite décroissante. Si ils sont finis, on va au-delà du dernier vers la droite et l'on prend le premier élément à l'ombre, il est forcément caché par un sommet, qui est lui aussi à l'ombre, en réitérant ce procédé, on construit ainsi une suite extraite croissante.

■

Théorème 7.4.14 (Bolzano-Weierstrass) : *De toute suite bornée on peut extraire une sous-suite convergente.*

Démonstration : Par le théorème précédent, elle admet une suite extraite monotone et bornée, donc convergente.

■

Exemple(s) 101 :

101.1 En particulier, la suite $(\cos(n))_{n\in\mathbb{N}}$ admet une suite extraite convergente.

4. on peut le quantifier : $\{u_n, \quad \forall p > n, u_n > u_p\}$

7.4.4 Suites adjacentes

Définition 7.4.33 : *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles. On dit qu'elles sont adjacentes si :*

1. *$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante,*
2. *$(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante,*
3. *$(u_n - v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.*

Remarque(s) 61 : On a alors :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leqslant v_n.}$$

En effet, dans le cas contraire, on aurait : $\exists n_0 \in \mathbb{N},\ u_{n_0} > v_{n_0}$ donc, par la monotonie des deux suites, pour $n \geqslant n_0$:

$$u_n \geqslant u_{n_0} > v_{n_0} \geqslant v_n$$

ce qui contredit que $(u_n - v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Théorème 7.4.15 : *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites adjacentes. Alors elles convergent vers la même limite.*

Démonstration : Par ce que l'on vient de remarquer, comme (v_n) est décroissante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leqslant v_n \leqslant b_0$$

la suite (u_n) est donc croissante, majorée, donc elle converge. Si l'on note l sa limite, comme $(u_n - v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0, $v_n = u_n - (u_n - v_n)$ converge aussi vers la même limite.

■

Exemple(s) 102 :

102.1 Considérons la suite définie, pour $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}.$$

Alors :

(a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$S_{2\,n} - S_{2\,n+1} = \frac{1}{\sqrt{2\,n+1}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

(b) De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$S_{2\,(n+1)} - S_{2\,n} = \frac{1}{\sqrt{2\,n+2}} - \frac{1}{\sqrt{2\,n+1}} \leqslant 0.$$

(c) Enfin,

$$S_{2\,(n+1)+1} - S_{2\,n+1} = -\frac{1}{\sqrt{2\,n+3}} + \frac{1}{\sqrt{2\,n+2}} \geqslant 0.$$

Les suites $(S_{2\,n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2\,n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes. Elles convergent donc vers la même limite. Donc $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

102.2 Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad d_n = \frac{\lfloor x\,10^n \rfloor}{10^n}$$

On appelle $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite décimale d'approximations par défaut de x et $d'_n = d_n + 10^{-n}$ la suite décimale d'approximations par excès de x. Montrons qu'elles sont adjacentes et qu'elles convergent vers x.

(a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\lfloor 10^n\,x \rfloor \leqslant 10^n\,x < \lfloor 10^n\,x \rfloor + 1$$

donc en divisant ces inégalités par 10^n, $d_n \leqslant x < d_n + 10^{-n} = d'_n$. Donc $x - d_n$ tend vers 0 puis d_n et d'_n tendent vers x lorsque n tend vers $+\infty$.

(b) Commençons par remarquer que, si $y \in \mathbb{R}$,

$$\lfloor y \rfloor \leqslant y < \lfloor y \rfloor + 1 \Longrightarrow 10\lfloor y \rfloor \leqslant y < 10\lfloor y \rfloor + 10 \quad \text{donc} \quad 10\lfloor y \rfloor \leqslant \lfloor 10\, y \rfloor \leqslant 10\lfloor y \rfloor + 9$$

on en déduit que $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et que $(d'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante car :

$$d_{n+1} - d_n = \frac{1}{10^{n+1}}\left(\lfloor 10^{n+1}\, x \rfloor - 10\lfloor 10^n\, x \rfloor\right) \geqslant 0 \quad \text{et} \quad d'_{n+1} - d'_n = \frac{1}{10^{n+1}}\left(\lfloor 10^{n+1}\, x \rfloor - (10\lfloor 10^n\, x \rfloor + 9)\right) \leqslant 0$$

(c) Par définition, $d'_n - d_n = 10^{-n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Les suites $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(d'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont donc adjacentes.

Une conséquence souvent utile de cet exemple est que :

Tout réel x est la limite d'une suite de rationnels.

7.5 Suites complexes

Commençons par remarquer que, comme le symbole $\leqslant$ n'a pas de sens dans les complexes, les notions de monotonie n'ont pas de sens pour les suites complexes. On peut cependant « sauver » une notion similaire : on dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (complexe) est **bornée** si $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée au sens réel.

Définition 7.5.34 : *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $l \in \mathbb{C}$ si :*

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0, \quad |u_n - l| \leqslant \epsilon.$$

Remarque(s) 62 :

1. Notez que la seule différence avec la définition pour les suites réelles est que la valeur absolue est devenue un module.
2. Comme pour les suites réelles, une méthode efficace pour montrer qu'une suite complexe converge est de montrer que la quantité $|u_n - l|$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$, c'est d'autant plus utile ici que cette suite est alors réelle !
3. Contrairement au cas réel, il n'existe pas de notion de suites convergeant vers $\pm\infty$.
4. Récapitulons : les notions suivantes, pour les suites complexes :

ont du sens	n'ont pas de sens
converge, bornée, suite extraite, stationnaire, constante.	croissante, décroissante, monotone, majorée, minorée, tend vers $\pm\infty$.

Exemple(s) 103 :

103.1 La suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \frac{e^{i\frac{n}{4}}}{n}$$

tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. En effet :

$$|u_n - 0| = \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Il existe une deuxième façon de relier les suites complexes aux suites réelles, via les parties réelles et imaginaires :

Proposition 7.5.12 : *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe. Alors :*

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l = a + i\,b \Longleftrightarrow \left[\mathrm{Re}(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} b\right].$$

Démonstration : Le point clé de cette preuve sont les inégalités suivantes (faites un dessin !). Si $z = x + i\,y \in \mathbb{C}$, alors :

$$|x| \leqslant |z|, \quad |y| \leqslant |z|, \quad |z| \leqslant |x| + |y|.$$

Procédons maintenant par double implication.

1. Supposons que : $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l = a + i\,b$. Alors :

$$|\operatorname{Re}(u_n) - a| = |\operatorname{Re}(u_n - l)| \leqslant |u_n - l| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

on en déduit que : $\operatorname{Re}(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a$ et de même que $\operatorname{Im}(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} b$.

2. Réciproquement, si l'on suppose que :

$$\operatorname{Re}(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a \quad \text{et} \quad \operatorname{Im}(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} b$$

alors :

$$|u_n - l| \leqslant |\operatorname{Re}(u_n - l)| + |\operatorname{Im}(u_n - l)| = |\operatorname{Re}(u_n) - a| + |\operatorname{Im}(u_n) - b| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l = a + i\,b$.

■

Remarque(s) 63 :

1. En particulier, grâce à cette proposition, on en déduit que la limite d'une suite complexe, si elle existe, est unique.
2. Des théorèmes d'opérations sur les limites réelles, on en déduit également les mêmes théorèmes sur les limites de suites complexes.

Exemple(s) 104 :

104.1 Soit $q \in \mathbb{C}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite suite géométrique de raison q et de premier terme $u_0 = 1$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = q^n.$$

Alors :

(a) si $|q| < 1$, $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$,

(b) si $q = 1$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante, égale à 1,

(c) dans tous les autres cas, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

Démonstration : Supposons que $|q| < 1$. Alors :

$$|u_n - 0| = |q^n| = |q|^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Ce qui montre que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Le deuxième cas est immédiat. Supposons maintenant que $|q| \geqslant 1$ et $q \neq 1$. Alors, si l'on suppose par l'absurde que la suite (u_n) converge vers l :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = q \times u_n$$

donc en passant à la limite dans cette égalité $l = q \times l$, donc comme $q \neq 1$, $l = 0$. Absurde ! Comme $|q| \geqslant 1$, $|u_n| \geqslant 1$ pour tout entier naturel n.

■

104.2 En particulier, pour tout $\theta \in]0, 2\,\pi[$ la suite définie explicitement par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = e^{i\,n\times\theta}$$

est divergente !

104.3 Cherchons une éventuelle limite de la suite définie par u_0 quelconque et :

$$u_{n+1} = \frac{i}{2}\,u_n + 1.$$

Il s'agit d'une suite arithmético-géométrique. Cherchons-en une formule explicite.

(a) On résout $x = \frac{i}{2}\,x + 1$, ce qui donne $x = \frac{-2}{i-2} = \frac{2}{5} \times (i + 2)$.

(b) On pose alors pour tout entier naturel n, $v_n = u_n - x$. on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} = \frac{i}{2} \times v_n.$$

Le suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc géométrique, de raison $\frac{i}{2}$. Donc pour tout entier naturel n, $v_n = \left(\frac{i}{2}\right)^n \times v_0$

(c) On en déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = v_n + x = \left(\frac{i}{2}\right)^n \times v_0 + x.$$

il suffit alors d'utiliser ce qu'on vient de voir : comme $|i/2| = 1/2 < 1$,

$$u_n = \left(\frac{i}{2}\right)^n \times v_0 + x \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x = \frac{2}{5} \times (i+2).$$

104.4 Déterminons les suites complexes $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergentes qui vérifient la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad z_{n+2} - (1+i) \times z_{n+1} + i \times z_n = 0.$$

Une telle suite est une suite récurrente linéaire d'ordre deux. Son équation caractéristique :

$$z^2 - (1+i) \times z + i = 0$$

Dont les deux racines sont :

$$z_1 = i \quad \text{et} \quad z_2 = 1.$$

Si une telle suite complexe vérifie cette relation de récurrence, il existe donc deux uniques complexes C et D tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad z_n = C + D \times i^n.$$

Si une telle suite converge, alors ses suites extraites $(u_{4\,n})$ et $(u_{4\,n+2})$ aussi, donc $C + D = C - D$ ce qui implique $D = 0$. Donc si une suite complexe vérifie cette relation de récurrence et converge, elle est constante, et réciproquement, il est clair qu'une suite constante vérifie cette relation de récurrence et converge.

104.5 Considérons la suite définie par :

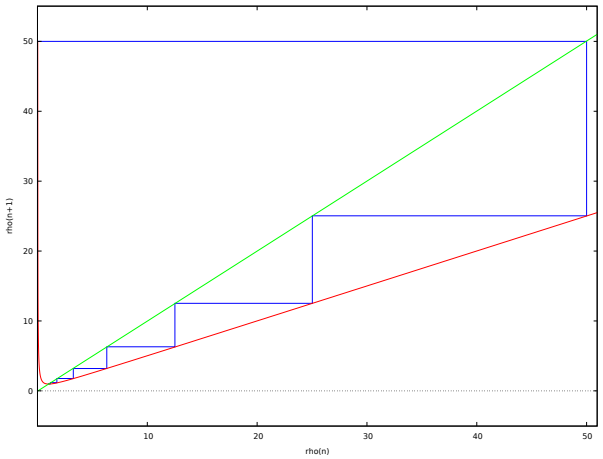
$$z_0 \in \mathbb{C}^*, \quad z_{n+1} = \frac{1}{2}\left(z_n + \frac{1}{\overline{z_n}}\right).$$

Remarquons que, si $z_n = \rho_n \times e^{i\,\theta_n}$, alors :

$$z_{n+1} = \frac{1}{2}\left(\rho_n + \frac{1}{\rho_n}\right) \times e^{i\,\theta_n}.$$

On en déduit que, si $z_0 = \rho \times e^{i\,\theta}$ alors pour tout entier n, on a (à condition de vérifier qu'il existe) : $z_n = \rho_n \times e^{i\,\theta}$, où $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite réelle définie par :

$$\rho_0 = \rho > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \rho_{n+1} = \frac{1}{2}\left(\rho_n + \frac{1}{\rho_n}\right).$$



De plus, si l'on définit pour $x \in \mathbb{R}_+^*$ la fonction f par $f(x) = 1/2 \times (x + 1/x)$, on a $f'(x) = 1/2 \times (1 - 1/x^2)$, on en déduit :

x	0		1		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

L'intervalle $[1, +\infty[$ est donc stable par f et pour $n \geqslant 1$, $\rho_n \in [1, +\infty[$. En particulier, ceci prouve que la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie. De plus :

$$\forall x \in [1, +\infty[, \quad f(x) - x = \frac{1 - x^2}{2\,x} \leqslant 0$$

La suite $(\rho_n)_{n\geqslant 1}$ est donc décroissante. Elle est de plus minorée par 1, elle converge donc vers une limite l. Comme f est continue, on a alors $f(l) = l$ donc $l = 1$. Finalement :

$$\rho_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$

et l'on en déduit :

$$z_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{i\,\theta}.$$

Chapitre 8

Arithmétiques

8.1 Arithmétique dans $\mathbb{N}$

8.1.1 Divisibilité, nombres premiers

Définition 8.1.35 : *Soit $(a,b) \in \mathbb{N}^2$. On dit que a divise b et on écrit $a|b$ ou encore que b est un multiple de a si :*

$$\exists c \in \mathbb{N}, \quad b = a\,c.$$

Exemple(s) 105 :

105.1 1 divise tous les entiers naturels, 0 est un multiple tous les entiers naturels.

105.2 si $n \in \mathbb{N}$, 2 divise $n + n^2 = n\,(n+1)$ car un des deux entiers naturels successifs n et $n+1$ est pair.

105.3 si n est impair, 8 divise $n^2 - 1$. En effet, on peut écrire $n = 4\,k + 1$ ou $n = 4\,k + 3$, où k est un entier naturel. Et alors :

$$n^2 - 1 = (4\,k+2)\,4\,k = 8\underbrace{k\,(2\,k+1)}_{\in\mathbb{N}} \quad \text{resp.} \quad n^2 - 1 = (4\,k+4)\,(4\,k+2) = 8\underbrace{(k+1)\,(2\,k+1)}_{\in\mathbb{N}}.$$

Propriété(s) 8.1.44 : Soit $(a,b,c,d) \in \mathbb{N}^4$. On a :

1. $[a|b \quad \text{et} \quad b|c] \Longrightarrow a|c$,
2. $[a|b \quad \text{et} \quad a|c] \Longrightarrow a|(b+c)$
3. $[a|b \quad \text{et} \quad c|d] \Longrightarrow a\,c|b,d$
4. $[a|b \quad \text{et} \quad b|a] \Longrightarrow a = b$

Démonstration : Montrons le premier point. Les autres se montrent de même. Si a divise b et a divise c, alors :

$$\exists (d,e) \in \mathbb{N}^2, \quad b = a\,d \quad \text{et} \quad c = a\,e.$$

On en déduit : $b + c = a\,(d+e)$, avec $d + e \in \mathbb{N}$. D'où $a|(b+c)$.

■

Définition 8.1.36 : *Un nombre premier p est un entier naturel qui admet exactement deux diviseurs : 1 et lui-même.*

Remarque(s) 64 : 1. Il est souvent utile de savoir quantifier « n n'est pas un nombre premier ». On dit dans ce cas que n est *décomposé* et on le quantifie par :

$$\exists (p,q) \in [\![2, n-1]\!]^2, \qquad n = p \times q.$$

2. On peut même être plus précis : si un entier naturel n est décomposé, il admet au moins un diviseur inférieur ou égal à n. Pour trouver l'ensemble des nombres premiers inférieurs à un certain entier, une méthode est d'utiliser le crible d'Ératosthène :

	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	60
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Son principe est simple :

(a) on écrit la liste des entiers naturels de 2 à n dans un tableau

(b) on parcourt le tableau par l'ordre croissant des entiers en effectuant l'opération : à chaque fois qu'on tombe sur un entier non barré, on barre tous ses multiples dans le tableau

(c) les nombres non barrés dans le tableau n'ont pas de diviseur inférieur ou égaux à leur racine et sont donc des nombres premiers.

Exemple(s) 106 :

106.1 Un entier naturel de la forme n^2-1 ($n \in \mathbb{N}^*$) est premier si et seulement si $n = 2$. En effet, dans le cas contraire :

$$n^2 - 1 = \underbrace{(n-1)}_{\neq 1 \text{ car } n \neq 2} \times (n+1)$$

donc $n^2 - 1$ est décomposé.

106.2 *Nombres premiers de Mersenne* : nous allons montrer que :

Si un entier naturel de la forme $2^n - 1$ est un nombre premier, alors n est un nombre premier.

Démonstration : L'idée est de raisonner par contraposée. Supposons que n est décomposé. Alors :

$$\exists (p,q) \in [\![2, n-1]\!]^2, \quad n = p \times q.$$

Donc, par la formule de Bernoulli :

$$2^n - 1 = (2^p)^q - 1^q = \underbrace{(2^p - 1)}_{\neq 1 \text{ car } p \neq 1} \times \sum_{k=0}^{q-1} (2^p)^k.$$

Donc $2^n - 1$ est décomposé.

■

Malheureusement, la réciproque est fausse : $2^{11} - 1 = 23 \times 89$. La quasi-totalité des plus grands nombres premiers connus sont de cette forme. Le plus grand nombre premier connu à ce jour est :

$$2^{82\,589\,933} - 1.$$

Sa primalité a été démontrée le 7 décembre 2018.

8.1.2 Décomposition en produit de facteurs premiers

Le raisonnement par récurrence forte repose sur le principe que, pour montrer $P(n)$ pour tout n, il suffit de :

1. Montrer $P(0)$ (*initialisation*)
2. Montrer que si, pour tout entier N, la propriété est vraie pour tout entier k inférieur à N, alors elle l'est aussi pour $N+1$ (hérédité)

Propriété(s) 8.1.45 : Tout entier naturel supérieur à 2 admet un diviseur premier.

Démonstration : Procédons par récurrence forte sur n :

1. *initialisation :* si $n = 2$ alors 2 est un nombre premier qui divise 2
2. *hérédité :* soit N un entier naturel et supposons que pour tout entier k inférieur ou égal à N, k admette un diviseur premier. Alors, soit $N+1$ est un nombre premier et c'est terminé, soit il s'écrit comme produit de deux entiers naturels strictement inférieurs différents de 1 : $N+1 = n_1 \times n_2$, $1 < n_1 < N+1$, $1 < n_2 < N+1$ et alors par hypothèse de récurrence appliquée à n_1, il est divisible par un nombre premier donc $N+1$ aussi.

■

Remarque(s) 65 :

1. L'ensemble des nombres premiers $\mathcal{P}$ est donc infini.

   Démonstration : Supposons par l'absurde qu'il est fini. Alors il admet un plus grand élément n_0. Mais alors l'entier naturel :
   $$N = n_0! + 1$$
   admet un diviseur premier p_0 par ce qu'on vient de voir, qui est inférieur ou égal à n_0. Le nombre premier p_0 divise donc $N - n_0! = 1$, ce qui est absurde.

   ■

2. Il ne faut pas interpréter cette preuve comme un algorithme de construction de nombres premiers. Cependant, en la poussant un peu plus loin, elle contient une information supplémentaire : il existe des suites arbitrairement grandes de nombres décomposés : $n! + 2, n! + 3, \cdots, n! + n$. Il semble donc que, même si ils sont infinis, les nombres premiers peuvent être très « rares »...

Théorème 8.1.16 (de décomposition en produit de facteurs premiers) : *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Notons $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers. Alors il existe une unique famille d'entiers naturels $(v_p(n))_{p\in\mathbb{P}}$ tous nuls sauf un nombre fini tels que :*
$$n = \prod_{p\in\mathcal{P}} p^{v_p(n)}.$$

Démonstration : *Existence :* On prouve l'existence par récurrence forte sur n : si $n = 1$, c'est clair, si l'on suppose que la décomposition existe pour tout $n \leqslant N$ alors, soit $N+1$ est premier, et sa décomposition est alors claire, soit il admet un facteur premier q tel que $N + 1 = q \times n$ avec n strictement inférieur à N et il suffit alors d'écrire la décomposition en facteurs premiers de n pour obtenir celle de $N+1$.
Unicité : Admis.

■

Exemple(s) 107 :

107.1 On a : $260 = 2^2 \times 5^1 \times 13^1$.

8.1.3 Division euclidienne, plus grand commun diviseur, plus petit commun multiple

Théorème 8.1.17 (division euclidienne) : *Soit $(a, b) \in \mathbb{N}^2$, $b \neq 0$. Il existe des uniques entiers naturels q (le quotient) et r (le reste) tels que :*
$$a = b \times q + r \quad r < b.$$

Démonstration : Existence : il suffit de prendre $q = \lfloor \frac{a}{b} \rfloor$. Unicité : supposons qu'il existe quatre entiers naturels q, q', r et r' tels que :

$$a = b \times q + r \quad r < b \quad \text{et} \quad a = b \times q' + r' \quad r' < b.$$

Alors $b \times (q - q') = r - r'$, mais $-b < r - r' < b$ et le seul multiple de b dans cet intervalle est 0 donc $r - r' = 0$ et on en déduit $r = r'$ puis $q = q'$.

■

Exemple(s) 108 :

108.1 $a = 60$, $b = 84$: $60 = 0 \times 84 + 60$,

108.2 $a = 720$, $b = 252$: $720 = 252 \times 2 + 216$.

Définition 8.1.37 : *Soit a et b deux entiers naturels. Soit $d \in \mathbb{N}$. On appelle plus grand diviseur commun de a et b l'entier naturel :*

$$PGCD(a, b) = \max(\{d \in \mathbb{N}, \quad d|a \quad \text{et} \quad d|b\}).$$

Remarque(s) 66 :

1. Un tel entier naturel existe toujours car 1 divise toujours a et b et l'ensemble des diviseurs communs à a et b est borné,
2. On appelle de même plus petit commun multiple de a et b la quantité :

$$PPCM(a, b) = \min(\{m \in \mathbb{N}^*, \quad a|m \quad \text{et} \quad b|m\}).$$

3. La décomposition en facteurs premiers peut permettre de calculer le PGCD et le PPCM de deux entiers naturels non nuls. Soit $(n, m) \in \mathbb{N}^*$ et si :

$$n = \prod_{p \in \mathcal{P}} p^{v_p(n)}, \quad m = \prod_{p \in \mathcal{P}} p^{v_p(m)}$$

alors :

$$\boxed{PGCD(n, m) = \prod_{p \in \mathcal{P}} p^{\min(v_p(n), v_p(m))}, \quad \text{et} \quad PPCM(n, m) = \prod_{p \in \mathcal{P}} p^{\max(v_p(n), v_p(m))}.}$$

4. On déduit immédiatement de ces deux formules la formule :

$$\boxed{\forall (n, m) \in \mathbb{N}^2, \quad PGCD(n, m) \times PPCM(n, m) = n \times m.}$$

car, pour tous réels x et y : $\max(x, y) + \min(x, y) = x + y$.

Pour certains entiers, il est facile de calculer leur PGCD :

Exemple(s) 109 :

109.1 $PGCD(1, n) = 1$,

109.2 $PGCD(0, n) = n$ si $n \in \mathbb{N}^*$.

En général, on dispose de l'algorithme d'Euclide :

Algorithme d'Euclide :

On cherche le PGCD de a et b :

1. On pose $a_0 = a$ et $b_0 = b$ et, tant que $b_k \neq 0$
2. on effectue la division Euclidienne de a_k par b_k :

$$a_k = b_k \times q_k + r_k,$$

et on pose $a_{k+1} = b_k$, $b_{k+1} = r_k$.

le PGCD de a et b est le dernier reste non nul de division Euclidienne.

Il s'agit de montrer que cet algorithme s'arrête et produit bien le résultat désiré :

1. L'algorithme s'arrête car, par définition de la division Euclidienne, pour tout k :
$$b_{k+1} < b_k$$
et il n'existe pas de suite d'entiers naturels strictement décroissante
2. L'algorithme donne le bon résultat car, pour tout k :
$$PGCD(a_k, b_k) = PGCD(a_{k+1}, b_{k+1}).$$
Démonstration : Il suffit de remarquer que l'ensemble des diviseurs positifs de a_k et b_k est le même que celui de a_{k+1} et b_{k+1}. En effet, si d divise a_k et b_k, il divise aussi $a_{k+1} = b_k$ et $b_{k+1} = a_k - b_k \times q_k$ et réciproquement, si d' divise a_{k+1} et b_{k+1}, il divise aussi $b_k = a_{k+1}$ et $a_k = a_{k+1} \times q_k + b_{k+1}$. ■
3. La suite $(PGCD(a_k, b_k))$ est donc constante, en particulier, si l'on numérote k_0 la dernière étape de l'algorithme :
$$PGCD(a, b) = PGCD(a_0, b_0) = PGCD(a_{k_0}, b_{k_0}) = PGCD(b_{k_0}, 0) = b_{k_0}.$$

Exemple(s) 110 :

110.1 On a :
$$\begin{array}{rcl} 403 & = & 91 \times 4 + 39 \\ 91 & = & 39 \times 2 + 13 \\ 39 & = & 13 \times 3 + 0 \end{array}$$
donc $PGCD(403, 91) = 13$.

110.2 On a :
$$\begin{array}{rcl} 404 & = & 91 \times 4 + 40 \\ 91 & = & 40 \times 2 + 11 \\ 40 & = & 11 \times 3 + 7 \\ 11 & = & 7 \times 1 + 4 \\ 7 & = & 4 \times 1 + 3 \\ 4 & = & 3 \times 1 + 1 \\ 3 & = & 1 \times 3 + 0 \end{array}$$
donc $PGCD(404, 91) = 1$.

8.2 Arithmétique dans $\mathbb{K}[X]$

8.2.1 Divisibilité, irréductibles

Rappelons que $\mathbb{K}[X]$ désigne l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$. Cet ensemble est muni des mêmes opérations que les fonctions polynomiales : sommes, produits, composition, dérivation. Rappelons de plus que, si P est non nul, on peut l'écrire :
$$P = \underbrace{a_n}_{\neq 0} X^n + \cdots + a_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$$
où n est son **degré** et $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$ ses **coefficients**. De plus, on pose : $\boxed{\deg(0) = -\infty}$.

Propriété(s) 8.2.46 : Soit $(P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2$. Alors :

1. $\deg(P \times Q) = \deg(P) + \deg(Q)$,
2. $\deg(P + Q) \leqslant \max(\deg(P), \deg(Q))$ avec égalité si $\deg(P) \neq \deg(Q)$.

Remarque(s) 67 : Ces formules restent vraies aussi si P ou Q est nul, en posant, si $a \in \mathbb{N} \cup \{-\infty\}$:
$$\max(-\infty, a) = a, \quad \text{et} \quad -\infty + a = -\infty.$$

Démonstration : Nous traiterons le seul cas non trivial : celui cas où P et Q sont non nuls. On peut supposer que $p = \deg(P) \geqslant q = \deg(Q)$:

$$P = a_p\,X^p + \cdots + a_0 \quad Q = b_q\,X^q + \cdots + b_0$$

1. On a, en développant le produit degré par degré :

$$P \times Q = \underbrace{a_p\,b_q}_{\neq 0}\,X^{p+q} + \cdots + a_0\,b_0$$

donc $\deg(P \times Q) = p + q$

2. De même, si p est strictmeent supérieur à q :

$$P + Q = \underbrace{a_p}_{\neq 0}\,X^p + \cdots + a_{q+1}\,X^{q+1} + (a_q + b_q)\,X^q + \cdots + a_0 + b_0$$

donc $\deg(P + Q) = p = \max(\deg(P), \deg(Q))$ et si $p = q$:

$$P + Q = \underbrace{(a_p + b_p)}_{\neq 0?}\,X^p + \cdots + a_0 + b_0$$

donc $\deg(P + Q) \leqslant p = \max(\deg(P), \deg(Q))$.

■

Définition 8.2.38 : *Soit A et B deux polynômes. On dit que A divise B et on note $A|B$ si :*

$$\exists P \in \mathbb{K}[X], \qquad B = A\,P.$$

Remarque(s) 68 :

1. La divisibilité pour les polynômes partage certaines propriétés avec celle des entiers :

   (a) $[P|Q \quad \text{et} \quad Q|R] \Rightarrow P|R$ (b) $[P|Q \quad \text{et} \quad P|R] \Rightarrow P|(Q + R)$ (c) $[P|Q \quad \text{et} \quad R|S] \Rightarrow P\,Q|R\,S$

2. Rappelons enfin cette propriété essentielle, vue au chapitre sur les complexes : si $P \in \mathbb{K}[X]$, $a \in \mathbb{K}$. Alors :

$$P(a) = 0 \iff (X - a)|P.$$

Les irréductibles sont aux polynômes ce que les nombres premiers sont aux entiers naturels. Il y a malheureusement une subtilité lorsqu'on essaye de généraliser la définition : les polynômes constants. Par exemple :

$$X = \frac{1}{2} \times 2\,X = \frac{1}{3} \times 3\,X.$$

Définition 8.2.39 : *Un polynôme P non constant est dit irréductible si :*

$$\forall (A, B) \in \mathbb{K}[X], \quad P = A \times B \Longrightarrow A \text{ ou } B \text{ est constant}.$$

Un polynôme qui n'est pas irréductible est dit décomposé.

Exemple(s) 111 :

111.1 Tous les polynômes P de degré 1 sont irréductibles.

111.2 Un polynôme réel de degré deux est irréductible s'il est de discriminant strictement négatif. En effet, s'il se décomposait, ce serait comme produit de deux polynômes de degré 1, qui auraient chacun une racine.

111.3 Un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré supérieur ou égal à 2 qui admet une racine $a \in \mathbb{K}$ n'est pas irréductible : il est divisible par $X - a$.

111.4 La réciproque est fausse dans le cas réel : le polynôme réel $P = (X^2+1)^2$ n'est pas irréductible mais n'admet pas de racine réelle.

Rappelons de plus le résultat essetiel :

Théorème 8.2.18 (d'Alembert-Gauss) : *Tout polynôme de complexe non constant admet une racine complexe.*

Remarque(s) 69 : Les irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ sont donc les polynômes de degré un.

Propriété(s) 8.2.47 : Soit $z \in \mathbb{C}$ une racine de $P \in \mathbb{R}[X]$. Alors $\overline{z}$ est racine de P.

Démonstration : En effet, si :

$$0 = P(z) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \, z^k \quad \text{alors} \quad 0 = \overline{P(z)} = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\overline{\lambda_k}}_{=\lambda_k} \, \overline{z}^k = P(\overline{z}).$$

■

Remarque(s) 70 : Les seuls irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ sont donc : les polynômes de degré 1 et ceux de degré 2 de discriminant strictement négatif.

Démonstration : Nous avons déjà vu que ces polynômes sont irréductibles. Réciproquement, si P est un polynôme de degré supérieur ou égal à deux irréductible, il admet une racine $z \in \mathbb{C}$ par le théorème de d'Alembert-Gauss. Si $z \in \mathbb{R}$, $(X - z)$ divise P et il n'est donc pas irréductible. Donc $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ donc d'après la propriété précédente, $\overline{z}$ est une *autre* racine de P. Mais alors :

$$X^2 - 2\,\mathrm{Re}(z)\,X + |z|^2 = (X - z)\,(X - \overline{z}) | P$$

ce polynôme est de degré deux, à discriminant strictement négatif car il n'a pas de racine réelle donc irréductible. Donc P, qui est aussi irréductible est un multiple de ce polynôme par une constante, donc un polynôme de degré deux à discriminant strictement négatif.

■

8.2.2 Décomposition en produit de facteurs irréductibles

Comme dans le cas des entiers naturels on a pour les polynômes des théorèmes de décomposition en produit de facteurs irréductibles.

Théorème 8.2.19 (décomposition en produit d'irréductibles) : *Tout polynôme de $\mathbb{K}[X]$ non constant s'écrit comme un produit de polynômes irréductibles.*

Démonstration : Par récurrence forte sur le degré de P.

■

Remarque(s) 71 : 1. Notez que ce théorème en contient en fait deux :

(a) Dans le cas complexe, les polynômes irréductibles sont ceux du premier degré donc la décomposition s'écrit :

$$P = \alpha \prod_{i=1}^{p} (X - a_i)^{m_i}.$$

où α est la coefficient directeur de P, $a_1, a_2, \ldots, a_p$ ses racines et on dit que $m_1, m_2, \ldots, m_p$ sont les **multiplicités** respectives de ses racines.

(b) Dans le cas réel, les ploynômes irréductibles sont ceux du premier degré et du second degré donc la décomposition s'écrit :

$$P = \alpha \prod_{i=1}^{p} (X - a_i)^{m_i} \prod_{j=1}^{q} (X^2 + \alpha_j \, X + \beta_j)^{n_j},$$

où où α est la coefficient directeur de P, $a_1, a_2, \ldots, a_p$ les racines réelles de P, $m_1, m_2, \ldots, m_p$, leurs multiplicités et et pour tout $j \in [\![1, q]\!]$ $n_j \in \mathbb{N}$, $\alpha_j^2 - 4\,\beta_j < 0$.

(c) Dans ces versions concrètes, comme nous avons choisi les polynômes irréductibles unitaires, la décomposition en produit d'irréductibles est clairement unique.

2. Revenons sur les multiplicités. Un polynôme P est dit **scindé** si son degré est la somme des multiplicités de ses racines. Clairement, tout polynôme complexe est scindé. Un polynôme réel, lui, est scindé si et seulement si il n'a que des racines réelles. On dit également qu'il est **à racines simples** si les multiplicités de ses racines sont toutes égales à un.
3. Si un polynôme P est **scindé et unitaire**, alors en développant sa décomposition en produit d'irréductibles :

$$\boxed{P = X^n - S\,X^{n-1} + \cdots + (-1)^n\,P}$$

où S est la somme de ses racines et P le produit.

Exemple(s) 112 :

112.1 $X^4 - X^2 - 2 = (X^2 - 2)\,(X^2 + 1) = (X - \sqrt{2})\,(X + \sqrt{2})\,(X^2 + 1)$ ce polynôme n'est pas scindé mais est à racines simples.

112.2 On considère le polynôme :

$$P = X^4 + X^3 + 2\,X^2 + X + 1$$

dont on nous indique qu'il admet i comme racine complexe. Alors il admet aussi $\overline{i}$ comme racine complexe donc il est divisible par $X^2 + 1$. On en déduit : $P = (X^2 + 1)\,(X^2 + X + 1)$.

112.3 Pour trouver la décomposition réelle de $X^n - 1$, il est bon de se souvenir de la représentation graphique des racines de l'unité. Le nombre de racines réelles dépend de la parité de n. Si n est impair, 1 est l'unique racine réelle et si n est pair, il y en a deux : 1 et -1. De plus, dans tous les cas, à une racine complexe $e^{\frac{2\,i\,k\,\pi}{n}}$ du demi-plan supérieur strict correspond son conjugué complexe dans le demi-plan inférieur strict : $e^{-\frac{2\,i\,k\,\pi}{n}}$ et :

$$(X - e^{\frac{2\,i\,k\,\pi}{n}})\,(X - e^{-\frac{2\,i\,k\,\pi}{n}}) = X^2 - 2\,\cos\left(\frac{2\,i\,k\,\pi}{n}\right)\,X + 1.$$

On a donc :

$$X^{2\,n} - 1 = (X-1)\,(X+1)\prod_{k=1}^{n-1}(X^2 - 2\,\cos\left(\frac{i\,k\,\pi}{n}\right)\,X + 1) \text{ et } X^{2\,n+1} - 1 = (X-1)\prod_{k=1}^{n}(X^2 - 2\,\cos\left(\frac{2\,i\,k\,\pi}{2\,n+1}\right)\,X + 1).$$

8.2.3 Division euclidienne

Définition 8.2.40 : *Soit $(A, B) \in \mathbb{K}[X]^2$, $B \neq 0$. Alors il existe deux uniques polynômes Q (le quotient) et R (le reste) tels que :*

$$A = Q \times B + R, \quad \deg(R) < \deg(B).$$

Démonstration :

1. *unicité* : supposons qu'il existe Q, Q', R, R' $\deg(R) < \deg(B)$ et $\deg(R') < \deg(B)$ tels que :

$$A = Q \times B + R \quad \text{et} \quad A = Q' \times B + R'.$$

Alors :

$$(Q - Q') \times B = R' - R$$

mais dans cette égalité, le terme de gauche est de degré supérieur ou égal à $\deg(B)$ sauf si $Q - Q' = 0$ et celui de droite est de degré strictement inférieur à celui de B. Le seul cas possible est donc $Q - Q' = 0$ ce qui implique $Q = Q'$ puis $R = R'$.

2. *existence* : on procède par récurrence sur le degré de A. Si $A = 0$, il suffit de prendre $A = R = 0$. Traitons l'hérédité. Si A est degré n, de coefficient dominant $a_n \neq 0$ alors si $\deg(B) > \deg(A)$ il suffit de prendre $Q = 0$ et $R = A$. Sinon, B est de degré $m \leqslant n$ et de coefficient dominant $b_m \neq 0$. Le polynôme :

$$A' = A - \frac{a_n}{b_m} X^{n-m} \times B$$

est de degré inférieur ou égal à $n-1$ et on peut alors lui appliquer l'hypothèse de récurrence il existe Q' et R' deux polynômes, $\deg(R') < \deg(B)$ tels que $A' = Q' \times B + R'$ et finalement :

$$A = A' + \frac{a_n}{b_m} X^{n-m} \times B = \underbrace{\left(\frac{a_n}{b_m} X^{n-m} + Q'\right)}_{=Q} \times B + R'$$

■

Exemple(s) 113 :

113.1 Calculons le reste de la division euclidienne du polynôme $X^n + X + 1$ par le polynôme $(X-1)^2$. Par le théorème, le reste de la division euclidienne est de degré strictement inférieur à 2 donc il existe deux uniques réels a, et b et un polynôme Q tels que :

$$X^n + X + 1 = Q \times (X-1)^2 + a\,X + b.$$

En appliquant en $X = 1$, on en déduit $a+b = 3$ puis en dérivant une fois puis en appliquant en $X = 1$: $n+1 = a$. Le reste est donc :

$$(n+1)\,X + (2-n).$$

113.2 On peut se servir de telles divisions euclidiennes pour calculer des puissances de matrices à condition d'en connaître un polynôme annulateur. Par exemple, si

$$M = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

on vérifie facilement que $P = (X-3)(X+3)$ est annulateur de P. Puis, en appliquant la méthode de l'exemple précédent, on trouve la division euclidienne :

$$X^n = (X-3)(X+3)\,Q + \frac{3^n - (-3)^n}{6} X + \frac{3^n + (-3)^n}{2}$$

et donc :

$$M^n = \frac{3^n - (-3)^n}{6}.M + \frac{3^n + (-3)^n}{2}.I_3.$$

8.2.4 Polynômes dérivés

Définition 8.2.41 : *On appelle polynôme dérivé du polynôme :*

$$P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \quad \textit{le polynôme :} \quad P' = \sum_{k=0}^{n} k\,a_k X^{k-1}$$

Remarque(s) 72 : 1. Dans le cas des polynômes à coefficients réels, on retrouve la dérivation de la fonction polynomiale $P(x)$, dans le cas complexe, c'est une nouveauté : on ne sait pas dériver une fonction définie sur $\mathbb{C}$,

2. toutes les formules classiques de dérivation restent vraies pour les polynômes. En particulier :
   (a) $(P+Q)' = P' + Q'$;
   (b) $(P \times Q)' = P' \times Q + P \times Q'$ (formule de Leibniz) ;
   (c) $(P \circ Q)' = Q' \times P' \circ Q$.

3. si P est non constant, $\boxed{\deg(P') = \deg(P) - 1}$.
4. bien entendu, on peut dériver plus d'une fois un polynôme.

Théorème 8.2.20 (formule de Taylor pour les polynômes) : *Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme non nul, $n = \deg(P)$. Alors pour tout $a \in \mathbb{K}$,*

$$P = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (X-a)^k$$

Remarque(s) 73 :
1. Comme dériver un polynôme de degré n plus de n fois l'annule, cette formule reste vraie pour en remplaçant n par tout entier naturel supérieur ou égal à n.
2. De ce point de vue, la formule reste vraie pour un polynôme nul.

Démonstration : On procède par récurrence sur n. Si $n = 0$, le résultat est clair. Supposons-le vrai pour $n \in \mathbb{N}$ fixé. Alors, si P est de degré $n+1$, P' est de degré n et donc par hypothèse de récurrence :

$$P' = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k+1)}(a)}{k!} (X-a)^k$$

mais alors, par définition de P' :

$$P = a_0 + \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k+1)}(a)}{(k+1)!} (X-a)^{k+1}$$

où a_0 est le coefficient constant de P. Mais en évaluant cette quantité en a : $a_0 = P(a)$ ce qui achève de montrer l'hérédité.

■

Une des utilisations des polynômes dérivés est la caractérisation de la multiplicité d'une racine :

Propriété(s) 8.2.48 : Soit P un polynôme non nul et a une racine de P. Alors la multiplicité de a pour P vaut m si et seulement si :

$$P(a) = P'(a) = \cdots = P^{(m-1)}(a) = 0 \quad \text{et} \quad P^{(m)}(a) \neq 0.$$

Démonstration : La multiplicité de a pour P vaut m si et seulement si :

$$(X-a)^m | P \quad \text{et} \quad (X-a)^{m+1} \not| P.$$

Mais par la formule de Taylor, la division Euclidienne de P par $(X-a)^m$ s'écrit :

$$P = (X-a)^m \underbrace{\sum_{k=m}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (X-a)^{k-m}}_{=Q \text{ le quotient}} + \underbrace{\sum_{k=0}^{m-1} \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (X-a)^k}_{=R \text{ le reste}}.$$

Donc $(X-a)^m | P$ si et seulement si $R = 0$, en d'autres termes :

$$P(a) = P'(a) = \cdots = P^{(m-1)}(a) = 0$$

De plus, dans ce cas, par le même raisonnement, la division euclidienne de P par $(X-a)^{m+1}$ vaut :

$$P = (X-a)^{m+1} \underbrace{\sum_{k=m+1}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (X-a)^{k-m-1}}_{=S \text{ le quotient}} + \underbrace{\frac{P^{(m)}(a)}{m!} (X-a)^m}_{=T \text{ le reste}}.$$

donc $(X-a)^{m+1} \not| P$ si et seulement si $T \neq 0$ ou encore si et seulement si $P^{(m)}(a) \neq 0$.

■

Exemple(s) 114 :

114.1 On considère le polynôme :

$$P = X^5 - 5\,X^4 + 14\,X^3 - 22\,X^2 + 17\,X - 5.$$

Alors 1 est racine évidente de P et $P(1) = P'(1) = P''(1) = 0$ mais $P'''(1) = 24 \neq 0$. Donc 1 est de multiplicité 3 pour P, que l'on peut donc factoriser par $(X-1)^3$. Une division euclidienne donne alors :

$$P = (X-1)^3\,(X^2 - 2\,X + 5)$$

ce qui est sa décomposition en produit d'irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

114.2 On considère, pour $n \in \mathbb{N}$:

$$P = \sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!}.$$

Alors P est scindé dans $\mathbb{C}$. Soit $a \in \mathbb{C}$ l'une de ses racines. Si $P'(a) = 0$, $a^n/n! = 0$ donc $a = 0$ ce qui est absurde ! 0 n'est pas racine de P. Donc P est scindé à racines simples.

Chapitre 9

Espaces vectoriels

9.1 Notion d'espace vectoriel

9.1.1 Premières définitions

Dans ce chapitre, nous noterons $\mathbb{K}$ les corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 9.1.42 : *Soit E un ensemble non vide, on dit que E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (ou un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$) si :*

1. *Il est muni d'une opération* interne [1]*, notée $+$, appelée* addition *qui vérifie :*
   (a) *$+$ est associative :*
   $$\forall (x,y,z) \in E^3,\ (x+y)+z = x+(y+z) \overset{Not}{=} x+y+z$$
   (b) *$+$ possède un élément neutre noté 0_E (ou 0 lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté) :*
   $$\forall x \in E,\ x+0_E = 0_E+x = x$$
   (c) *Tout élément de E possède un opposé :*
   $$\forall x \in E,\ \exists! y \in E,\ x+y = y+x = 0_E,\ \text{on note } y \overset{Not}{=} -x$$
   de plus, on note $-$ l'opération :
   $$\forall (x,y) \in E^2,\ x+(-y) \overset{Not}{=} x-y$$
   (d) *$+$ est commutative :*
   $$\forall (x,y) \in E^2,\ x+y = y+x$$
2. *Il est muni d'une opération* externe [2]*, notée $.$, appelée* multiplication par un scalaire *qui vérifie :*
   (a) *$.$ est distributive par rapport à l'addition de E :*
   $$\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall (x,y) \in E^2,\ \lambda.(x+y) = \lambda.x+\lambda.y$$
   (b) *$.$ est distributive par rapport à l'addition de $\mathbb{K}$:*
   $$\forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2,\ \forall x \in E,\ (\lambda+\mu).x = \lambda.x+\mu.x$$
   (c) *$.$ est distributive par rapport à la multiplication de $\mathbb{K}$:*
   $$\forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2,\ \forall x \in E,\ (\lambda\times\mu).x = \lambda.(\mu.x)$$
   (d) *L'unité du corps est respectée :*
   $$\forall x \in E,\ 1.x = x$$

Les éléments de E s'appellent alors vecteurs et les éléments de $\mathbb{K}$ scalaires.

1. Cela signifie que si x et y sont dans E, alors $x+y$ est dans E.
2. Cela signifie que si λ est un *scalaire* (il est dans $\mathbb{K}$) et si x est dans E, alors $\lambda.x$ est dans E.

Propriété(s) 9.1.49 : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit $x \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On a :

$$\lambda.x = 0_E \iff (\lambda = 0_\mathbb{K} \text{ ou } x = 0_E)\,.$$

Démonstration :

1. Soit x un élément de E. Comme $0_\mathbb{K}$ est un neutre de $\mathbb{K}$ et . est distributive par rapport à l'addition de $\mathbb{K}$, on a :
$$0_\mathbb{K}.x = (0_\mathbb{K} + 0_\mathbb{K}).x = 0_\mathbb{K}.x + 0_\mathbb{K}.x$$
puis, en ajoutant $-0_\mathbb{K}.x$, l'inverse de $0_\mathbb{K}.x$ des deux côtés de l'égalité :
$$0_E = 0_\mathbb{K}.x + (-0_\mathbb{K}.x) = (0_\mathbb{K}.x + 0_\mathbb{K}.x) + (-0_\mathbb{K}.x)$$
on conclut alors en utilisant l'associativité de l'addition de E :
$$0_E = 0_\mathbb{K}.x + (0_\mathbb{K}.x + (-0_\mathbb{K}.x)) = 0_\mathbb{K}.x\ .$$
2. La preuve de ce point est très similaire au point précédent. Soit λ un élément de $\mathbb{K}$. On utilise que 0_E est un neutre de E et . est distributive par rapport à l'addition de E :
$$\lambda.0_E = \lambda.(0_E + 0_E) = \lambda.0_E + \lambda.0_E,$$
puis, puis on ajoute $-\lambda.0_E$, l'inverse de $\lambda.0_E$ des deux côtés de l'égalité et on conclut en utilisant l'associativité de l'addition de E :
$$0_E = \lambda.0_E + (-\lambda.0_E) = (\lambda.0_E + \lambda.0_E) + (-\lambda.0_E) = \lambda.0_E.$$
3. La réciproque de cette implication est exactement les points 1. et 2.. Montrons le sens direct. Soit λ un élément de $\mathbb{K}$ et x un élément de E. Supposons que $\lambda.x = 0_E$. Si $\lambda = 0_\mathbb{K}$ il n'y a rien à prouver. Sinon, en utilisant la distributivité de . par rapport à la multiplication de $\mathbb{K}$ et que $1.x = x$ on a :
$$x = 1.x = (\lambda^{-1} \times \lambda).x = (\lambda^{-1}).0_E,$$
et donc par le point 2, $x = 0_E$.

■

Remarque(s) 74 : Si $-x$, l'inverse de x existe alors il est unique ; il vaut $(-1).x$.

Démonstration : Si y et z sont inverses de x, alors $y = y + 0_E = y + (x + z) = (y + x) + z = 0_E + z = z$. Enfin, $x + (-1).x = 1.x + (-1).x = (1 + (-1)).x = 0_E$ donc $-x = (-1).x$.

■

Les ensembles suivants sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels :

Exemple(s) 115 :

115.1 $\mathbb{K}^n$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, de neutre $0_{\mathbb{K}^n} = (0, \ldots, 0)$ (n fois).

115.2 De même, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, de neutre $0_{n,p}$.

115.3 Si X est un ensemble et si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, alors
$$\mathcal{F}(X, E) \overset{Not}{=} \{f\ :\ X \to E\} \text{ est un } \mathbb{K}\text{-espace vectoriel.}$$

Démonstration : Nous allons prouver que $F = \mathcal{F}(X, E)$ vérifie les axiomes des espaces vectoriels pour les lois suivantes :
$$\forall f, g \in F,\ \forall x \in X,\ (f +_F g)(x) := f(x) +_E g(x) \text{ (addition)}$$
$$\forall f \in F, \forall \lambda \in \mathbb{K},\ (\lambda._F f)(x) := \lambda._E f(x) \text{ (multiplication par un scalaire).}$$
La fonction $f +_F g$ est un élément de F, la loi $+_F$ est donc bien une loi de composition interne. Elle est clairement associative et commutative car la loi $+_E$ l'est. Définissons l'élément 0_F par
$$\forall x \in X,\ 0_F(x) = 0_E.$$
C'est un neutre de F car 0_E est un neutre de E. On définit enfin pour une fonction f la fonction $-f$ par
$$\forall x \in X,\ (-f)(x) := -f(x) \text{ (il y a une différence !).}$$

On vérifie alors aisément que $-f$ est un opposé de f :

$$\forall x \in X,\ ((-f) +_F f)(x) = -f(x) +_E f(x) = 0_E = 0_F(x).$$

La fonction $\lambda._F f$ est aussi un élément de F, la loi $._F$ définit donc bien opération externe de F. Les propriétés 2. (a), (b), (c) et (d) de cette opération de F découlent toutes directement de la définition des opérations et du fait qu'elles sont vérifiées par celles de E. Montrons par exemple (b). Soient λ et μ des éléments de $\mathbb{K}$ et f un élément de F. On a, pour tout x élément de X :

$$((\lambda +_{\mathbb{K}} \mu).._F f)(x) = (\lambda +_{\mathbb{K}} \mu)._E f(x),$$

mais $._E$ est distributive par rapport à l'addition de $\mathbb{K}$ donc :

$$(\lambda +_{\mathbb{K}} \mu)._E f(x) = \lambda._E f(x) +_E \mu._E f(x)$$

puis, par définition des lois $+_F$ et $._F$:

$$\lambda._E f(x) +_E \mu._E f(x) = (\lambda._F f)(x) +_E (\mu._F f)(x) = (\lambda._F f(x) +_F \mu._F f)(x).$$

Ces égalités étant valables pour tous les x de X, on en déduit :

$$\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}, \forall f \in F :\ (\lambda +_{\mathbb{K}} \mu)._F f = \lambda._F f +_F \mu._F f.$$

■

115.4 De cet exemple, on déduit immédiatement que l'ensemble des suites de $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (prendre $X = \mathbb{N}$ et $E = \mathbb{K}$), de neutre la suite nulle.

Comme nous avons pu le voir il est long en général de montrer qu'un ensemble est un espace vectoriel. Heureusement, nous ne le ferons (presque) jamais en pratique grâce à la notion de sous-espace vectoriel.

Définition 9.1.43 : *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $F \subset E$, on dit que F est un sous-espace vectoriel de E si :*

1. $0_E \in F$;
2. *F est stable par $+$:* $\forall (x, y) \in F^2,\ x + y \in F$;
3. *F est stable par $.$:* $\forall x \in F,\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \lambda.x \in F$.

Propriété(s) 9.1.50 : Si F est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, alors c'est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Démonstration : Remarquons (c'est le point essentiel) que par les points 2 et 3, l'addition et le produit extérieur sont des opérations internes à F. Pour vérifier les différents points de la définition d'un espace vectoriel, on peut remarquer que pour presque tous, leur véracité pour tout élément de E implique celle pour tout élément de F. Le seul point non trivial est remarquer que si $x \in F$ alors, $-x = (-1).x \in F$.

■

Exemple(s) 116 :

116.1 Tout espace vectoriel E admet pour sous-espace vectoriel E et $\{0_E\}$. On les appelle les sous-espaces vectoriels triviaux de E.

116.2 Attention à penser à vérifier qu'il s'agit d'un sous-ensemble avant de parler de sous-espace vectoriel. Dire que $\mathbb{R}$ est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des fonctions réelles définies sur $\mathbb{R}$ n'a par exemple aucun sens !

116.3 On a les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^n$ suivants :

(a) les droites du plan ont pour équation cartésienne :

$$a \times x + b \times y = c\ ;$$

ce sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$ si et seulement si $c = 0$, c'est-à-dire si elles passent par l'origine.

(b) les plans de l'espace ont pour équation cartésienne :

$$a \times x + b \times y + c \times z = d\ ;$$

ce sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ si et seulement si $d = 0$, c'est-à-dire s'ils passent par l'origine.

(c) les droites de l'espace peuvent être décrites comme l'intersection de deux plans non parallèles. Elles ont donc pour équation cartésienne :

$$\begin{cases} a \times x + b \times y + c \times z = d \\ a' \times x + b' \times y + c' \times z = d' \end{cases} ;$$

ce sont donc des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ si et seulement si $(d, d') = (0, 0)$, c'est-à-dire si elles passent par l'origine.

(d) Plus généralement, l'ensemble des solutions d'un système d'équations linéaire à coefficients dans $\mathbb{K}$

$$\begin{cases} a_{1,1} \times x_1 + a_{1,2} \times x_2 + \cdots + a_{1,n} \times x_n = b_1 \\ a_{2,1} \times x_1 + a_{2,2} \times x_2 + \cdots + a_{2,n} \times x_n = b_2 \\ \quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad \vdots \\ a_{p,1} \times x_1 + a_{p,2} \times x_2 + \cdots + a_{p,n} \times x_n = b_p \end{cases}$$

est un sous-espace vectoriel si et seulement si son second membre est nul. Ou encore si $0_{\mathbb{K}^n}$ est solution du système.

116.4 L'ensemble des matrices $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ possède pour sous-espaces vectoriels :

(a) L'ensemble des matrices diagonales, triangulaires supérieures ou inférieures.

(b) L'ensemble des matrices symétriques, antisymétriques.

116.5 Concernant les sous-espaces vectoriels de $\mathcal{F}(X, \mathbb{K})$:

(a) L'ensemble des fonctions continues est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des fonctions à valeurs dans $\mathbb{K}$. Il en est de même pour les fonctions dérivables, de classe $\mathcal{C}^1$, etc...

(b) L'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire (du premier ou second ordre) est un sous-espace vectoriel si et seulement si le second membre est la fonction nulle.

(c) On note, pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{K}_n[X]$ l'ensemble des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à n et à coefficients dans $\mathbb{K}$. Abusivement, on identifiera ces fonctions à leur formule, donc :

$$\boxed{\mathbb{K}_n[X] = \left\{ \sum_{k=0}^{n} a_k \, X^k, \quad (a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1} \right\}.}$$

C'est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(X, \mathbb{K})$.

Propriété(s) 9.1.51 : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de F et $F \subset E$. Alors F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si :

1. $F \neq \emptyset$
2. $\forall (x, y) \in F^2, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad x + \lambda.y \in F.$

Démonstration : Le sens direct est clair. Pour la réciproque, remarquons qu'il suffit pour retrouver la stabilité par somme de prendre $\lambda = 1_{\mathbb{K}}$ et pour celle par le produit externe de prendre $x = 0_E$. Reste à montrer que $0_E \in F$. Mais comme F est non vide, il possède un élément x et donc, par le deuxième point pour $\lambda = -1$ et $x = y$:

$$x + (-1).x = (1 - 1).x = 0_E \in F$$

où l'on a utilisé la première règle de calcul de la propriété précédente pour la dernière égalité.

■

Exemple(s) 117 :

117.1 Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E, alors $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration : Utilisons la propriété précédente. On a :

(a) $0_E \in F$ et $0_E \in G$ donc $0_E \in F \cap G$ d'où $F \cap G \neq \emptyset$.

(b) Soit $(x, y) \in F \cap G$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors :

i. $(x, y) \in F$ donc $x + \lambda.y \in F$ comme F est un sous-espace vectoriel de E

ii. $(x, y) \in G$ donc $x + \lambda.y \in G$ comme G est un sous-espace vectoriel de E

donc $x + \lambda.y \in F \cap G$.

Donc $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E.

■

117.2 Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E, alors $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$.

Démonstration : La réciproque est claire. Montrons le sens direct. Si $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E alors si $f \in F$ et $g \in G$, $f + g \in F \cup G$ car c'est un sous-espace vectoriel de E. Donc $f + g \in F$ ou $f + g \in G$. Puis, comme F et G sont des sous-espaces vectoriels, $g = f + g - f \in F$ ou $f = f + g - g \in G$. Donc :

$$[f \in F \text{ et } g \in G] \Rightarrow [f \in G \text{ ou } g \in F.]$$

D'où, si F n'est pas inclus dans G, il existe $f = f_0 \in F$ tel que $f_0 \notin G$ et par ce qu'on vient de voir, pour tout $g \in G$, $g \in F$ donc $G \subset F$.

■

9.1.2 Familles libres

Définition 9.1.44 : *Une famille $(e_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ de vecteurs de E est dite libre si :*

$$\forall(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \quad \sum_{k=1}^{n} \lambda_k.e_k = 0_E \Longrightarrow \forall i \in [\![1, n]\!], \quad \lambda_i = 0.$$

On dit alors que les vecteurs $e_1, e_2, ..., e_n$ sont linéairement indépendants. Une famille qui n'est pas libre est dite liée.

Remarque(s) 75 :

1. Pour montrer qu'une famille n'est pas libre, il suffit de trouver une combinaison linéaire des vecteurs $e_1, e_2, ..., e_n$ dont au moins un des coefficients est non nul qui donne le vecteur nul.
2. Si la famille $(e_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ est libre alors on peut *identifier* les scalaires dans les égalités qui les font apparaître :

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k.e_k = \sum_{k=1}^{n} \mu_k.e_k \Longrightarrow \forall k \in [\![1, n]\!], \quad \lambda_k = \mu_k.$$

3. Clairement, toute sous-famille d'une famille libre est libre.

Exemple(s) 118 :

118.1 Deux vecteurs non nuls de l'espace ou du plan $\vec{x}$ et $\vec{y}$ sont linéairement indépendants si et seulement si ils ne sont pas colinéaires et liés sinon.

118.2 Le pivot de Gauss est un outil puissant pour montrer qu'une famille est libre. Par exemple, la famille : $\{(1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$ est libre car :

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ a + c = 0 \\ b + c = 0 \end{cases} \Longrightarrow a = b = c = 0$$

mais la famille $\{(1, -1, 0), (1, 0, -1), (0, 1, -1)\}$ ne l'est pas, car :

$$(1, -1, 0) - (1, 0, -1) + (0, 1, -1) = (0, 0, 0).$$

118.3 La famille des matrices élémentaires est libre.

118.4 La famille $(X^k)_{k\in[\![1,n]\!]}$ de $\mathbb{K}[X]$ est libre, c'est une conséquence immédiate de l'unicité des développements limités en 0.

118.5 La famille de fonctions $\cos, \sin$ est libre. En effet s'il existe $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tels que :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad a\cos(x)+b\sin(x)=0$$

alors en prenant $x=0$, $a=0$ puis en dérivant l'expression et en prenant $x=0$, $b=0$.

118.6 La famille de fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=e^x,\quad g(x)=e^{2x},\quad h(x)=e^{3x}$$

est libre. En effet : s'il existe $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ tels que :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad a\,f(x)+b\,g(x)+c\,h(x)=0$$

alors : la fonction qui apparaît est équivalente en $+\infty$ à $c\,e^{3x}$ donc $c=0$ et en $-\infty$ à $a\,e^x$ donc $a=0$ puis en prenant $x=0$, $b=0$.

118.7 Cependant, la famille de de fonctions définies sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$f(x)=\ln(x),\quad g(x)=\ln(2x),\quad h(x)=\ln(3x)$$

n'est pas libre. En effet :

$$\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\quad (\ln(2)-\ln(3))\ln(x)+\ln(3)\ln(2x)-\ln(2)\ln(3x)=0.$$

Propriété(s) 9.1.52 : Une famille de polynômes $P_1,P_2,\dots,P_n$ est dite échelonnée si :

$$0\leqslant\deg(P_1)<\deg(P_2)<\cdots<\deg(P_n).$$

Toute famille échelonnée de polynômes est libre.

Démonstration : Soit $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n$ des scalaires tels que : $\lambda_1.P_1+\lambda_2.P_2+\cdots+\lambda_n.P_n=0$. Si par l'absurde, $\lambda_n\neq 0$ alors par le cas d'égalité dans la somme de degrés :

$$-\infty=\deg(0)=\deg\left(\sum_{k=1}^{n}\lambda_k.P_k\right)=\deg(P_n)$$

Absurde ! $\deg(P_n)\geqslant 0$. Donc $\lambda_n=0$ et par une récurrence immédiate, il en est de même de tous les autres coefficients. ■

Exemple(s) 119 :

119.1 En particulier, pour tout $a\in\mathbb{K}$, la famille : $1, X-a, (X-a)^2,\dots,(X-a)^n$ est une famille libre de $\mathbb{K}_n[X]$.

9.1.3 Espace vectoriel engendré, familles génératrices

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On appelle **combinaison linéaire** de $(x,y)\in E^2$ tout élément de E :

$$\lambda.x+\mu.y,\quad (\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2.$$

Plus généralement, si $x_1,x_2,\dots,x_n$ sont des éléments de E, une combinaison linéaire de ces éléments s'écrit :

$$\sum_{k=1}^{n}\lambda_k.x_k=\lambda_1.x_1+\lambda_2.x_2+\cdots+\lambda_n.x_n\ ,\quad (\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{K}^n.$$

Dans la suite, on notera l'ensemble des combinaisons linéaires de ces vecteurs :

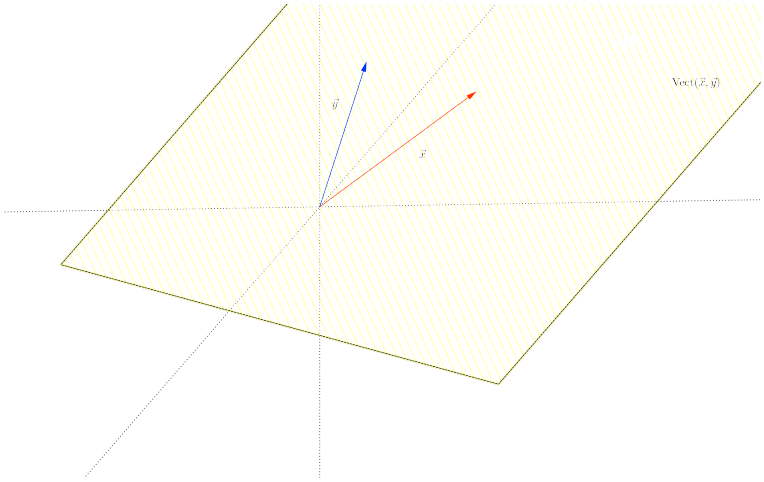
$$\boxed{\mathrm{Vect}(x_1,x_2,\dots,x_n)=\left\{\sum_{k=1}^{n}\lambda_k.x_k\quad(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{K}^n\right\}.}$$

Exemple(s) 120 :

120.1 Le plan peut s'écrire $\text{Vect}((1,0),(0,1))$, l'espace $\text{Vect}((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$.

120.2 Attention cependant : le plan peut aussi s'écrire $\text{Vect}((1,0),(0,1),(1,1))$...

120.3 Si $\vec{x}$ et $\vec{y}$ sont des vecteurs non nuls non colinéaires de $\mathbb{R}^3$, $\text{Vect}(\vec{x},\vec{y})$ est le plan passant par l'origine contenant $\vec{x}$ et $\vec{y}$:



120.4 si ces deux vecteurs sont non nuls et colinéaires, alors il s'agit de la droite passant par l'origine et contenant $\vec{x}$.

Proposition 9.1.13 : *Soit $e_1, e_2, \ldots, e_n$ des éléments de E alors $\text{Vect}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E qui contient $x_1, x_2, \ldots, x_n$. On l'appelle espace vectoriel engendré par $x_1, x_2, \ldots, x_n$.*

Démonstration : Il y a deux choses à prouver :

1. C'est un sous-espace vectoriel :
   (a) $0_E \in \text{Vect}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$: il suffit de prendre $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$
   (b) stabilité par la somme : si $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ et $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ sont des éléments de $\mathbb{K}$ alors :
   $$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k.x_k + \sum_{k=1}^{n} \mu_k.x_k = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{(\lambda_k + \mu_k)}_{\in\mathbb{K}}.x_k$$
   (c) stabilité par le produit externe : si $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ et λ sont des éléments de $\mathbb{K}$, alors :
   $$\lambda.\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k.x_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{(\lambda \times \lambda_k)}_{\in\mathbb{K}}.x_k$$
2. Il s'agit du plus petit tel sous-espace-vectoriel : si F est un espace vectoriel contenant x_1, x_2,...,x_n, alors par stabilité par les lois il contient toutes les combinaisons linéaires des ces éléments, donc :
   $$\text{Vect}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \subset F.$$

■

Remarque(s) 76 : 1. Le deuxième point de la proposition est souvent utile à exploiter. Par exemple, si $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont des éléments de l'espace vectoriel F alors :
$$\text{Vect}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \subset F.$$
2. Ce dernier point est en particulier utile si $y_1, y_2, \ldots, y_p$ sont des combinaisons linéaires des vecteurs $x_1, x_2, \ldots, x_n$ donc appartiennent à l'espace vectoriel engendré par ceux-ci :
$$\text{Vect}(y_1, y_2, \ldots, y_p) \subset \text{Vect}(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Définition 9.1.45 : *Soit g_1, g_2,...,g_n des éléments de E. On dit que la famille $(g_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ est génératrice de E si :*

$$E = \text{Vect}(g_1, g_2, ...g_n)$$

Remarque(s) 77 : En d'autres termes, la famille $(g_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ est génératrice de E est génératrice de E si et seulement si on peut écrire tout élément de E comme combinaison linéaire d'éléments de la famille.

Exemple(s) 121 :

121.1 La famille $\{(0,1),(1,1)\}$ est génératrice du plan Π, en effet :

$$(1,0) = (-1).(0,1) + 1.(1,1) \quad \text{et} \quad (0,1) = 1.(0,1) + 0.(1,1)$$

donc $\Pi \subset \text{Vect}((0,1),(1,1)) \subset \text{Vect}((1,0),(0,1)) = \Pi$

121.2 La famille $\{(0,1),(1,1),(1,2)\}$ est donc aussi génératrice du plan.

121.3 Trois vecteurs de l'espace sont générateurs si et seulement si ils ne sont pas coplanaires.

121.4 La famille $\{(1,-1,0),(0,1,-1),(1,0,-1)\}$ n'est pas génératrice de l'espace. En effet, ces trois vecteurs sont contenus dans le plan d'équation :

$$x + y + z = 0$$

donc tout vecteur de l'espace qui n'est pas dans ce plan n'est pas contenu dans l'espace vectoriel engendré par ces trois vecteurs

121.5 L'ensemble des matrices diagonales $\mathcal{D}_n$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ s'écrit :

$$\begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d_n \end{pmatrix} = d_1.\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} + d_2.\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} + \cdots + d_n.\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Donc $\mathcal{D}_n = \text{Vect}(E_{i,i},\ i \in [\![1,n]\!])$. La famille des matrices élémentaires $\{E_{1,1}, E_{2,2}, \ldots, E_{n,n}\}$ est donc génératrice.

121.6 L'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle homogène :

$$y'' + y = 0$$

est $S = \{t \in \mathbb{R} \mapsto C \times \cos(t) + D\,\sin(t),\ (C,D) \in \mathbb{R}^2\} = \text{Vect}(\cos, \sin)$ donc la famille $\{\cos, \sin\}$ est génératrice de cet espace vectoriel.

121.7 L'ensemble des suites complexes vérifiant le relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} - 3\,u_{n+1} + 2\,u_n = 0$$

est $\mathcal{S} = \{C\,(a_n)_{n\in\mathbb{N}} + D\,(b_n)_{n\in\mathbb{N}}, (C,D) \in \mathbb{C}^2\}$ avec pour tout n, $a_n = 1^n = 1$ et $b_n = 2^n$. Donc $\mathcal{S} = \text{Vect}((1)_{n\in\mathbb{N}}, (2^n)_{n\in\mathbb{N}})$. Une famille génératrice de l'ensemble des ces suites est donc $\{(1)_{n\in\mathbb{N}}), (2^n)_{n\in\mathbb{N}})\}$.

9.1.4 Bases

Définition 9.1.46 : *Soit $e_1, e_2, ..., e_n$ une famille de vecteurs de E. On dit que cette famille est une base si elle est libre et génératrice.*

Les bases suivantes sont dites *canoniques* ; ce sont celles que l'on utilise le plus souvent :

Exemple(s) 122 :

122.1 Dans $\mathbb{K}^n$, la famille des vecteurs :

$$\forall k \in [\![1,n]\!], \quad e_k = \underbrace{(0,\dots,0,1,0,\dots,0)}_{\text{le 1 au rang } k}$$

est une base de $\mathbb{K}^n$.

122.2 L'espace vectoriel $\mathbb{K}_n[x]$ a pour base $(X^k)_{k\in[\![0,n]\!]}$.

122.3 Dans $\mathcal{M}_{n,k}(\mathbb{K})$ la famille de matrices élémentaires $(E_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,m]\!]}$ est une base.

Définition 9.1.47 : *Si $\mathcal{B} = (e_k)_{k\in[\![1,n]\!]}$ est une base de E alors par définition :*

$$\forall x \in E, \quad \exists!(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \quad x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k.e_k$$

*on appelle la famille $(\lambda_k)_{k\in[\![1,n]\!]}$ les **coordonnées** du vecteur x dans la base $\mathcal{B}$.*

Exemple(s) 123 :

123.1 Dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$, les coordonnées du vecteur $(x_1,x_2,\dots,x_n)$ sont $(x_1,x_2,\dots,x_n)$.

123.2 Dans la base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$, les coordonnées de $P = \sum_{k=0}^{n} a_k\, X^k$ sont $(a_0,a_1,\dots,a_n)$.

123.3 Dans le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ constitué des matrices diagonales, les coordonnées de la matrice :

$$\begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d_n \end{pmatrix}$$

dans la base $(E_{i,i})_{i\in[\![1,n]\!]}$ sont $(d_1,d_2,\dots,d_n)$.

123.4 On considère la plan P d'équation $x+y+z=0$. La famille $(1,0,-1)$, $(1,-1,0)$ est génératrice car tout vecteur (x,y,z) de ce plan peut s'écrire $(x,y,z) = x.(1,0,-1)+y.(1,-1,0)$. Et elle est clairement libre. De plus, $(2,-1,-1) \in P$. Calculons ses coordonnées dans la base $(1,0,-1)$, $(1,-1,0)$. On a :

$$(2,-1,-1) = 1.(1,0,-1) + .1(1,-1,0)$$

ses coordonnées sont donc $(1,1)$.

123.5 Par la formule de Taylor-Young, si $P \in \mathbb{K}_n[X]$:

$$\boxed{\forall P \in \mathbb{K}_n[X], \quad P = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}\,(X-a)^k.}$$

La famille $(X-a)^k/k!$, $k\in[\![0,n]\!]$ est donc libre et génératrice. C'est une base de $\mathbb{K}_n[X]$. De plus, les coordonnées de P dans cette base sont : $(P(a),P'(a),P''(a),\cdots,P^{(n)}(a))$.

Théorème 9.1.21 (de la base incomplète) : *Soit $(l_1,l_2,\dots,l_n)$ une famille libre de E et $(g_1,g_2,\dots,g_p)$ une famille génératrice de E non nul. Alors il est possible de compléter cette famille libre à l'aide d'éléments de la famille génératrice en une base de E, c'est-à-dire :*

$$\exists q \leqslant p, \exists (i_k)_{k\in[\![1,q]\!]} \in [\![1,p]\!]^q, \quad (l_1,l_2,\dots,l_n,g_{i_1},g_{i_2},\dots,g_{i_q}) \text{ est une base de } E.$$

Démonstration : Nous allons commencer par prouver un lemme : si $(l_1,l_2,\dots,l_n)$ est une famille libre de E et $g \notin \text{Vect}(l_1,l_2,\dots,l_n)$, alors $(l_1,l_2,\dots,l_n,g)$ est encore une famille libre de E. En effet : s'il existe $(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n,\lambda) \in \mathbb{K}^{n+1}$ tels que :

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k.l_k + \lambda.g = 0_E$$

Alors, si $\lambda \neq 0$, on aurait :

$$g = \sum_{k=1}^{n} -\frac{\lambda_k}{\lambda}.l_k \in \text{Vect}(l_1, l_2, \dots, l_n)$$

ce qui est supposé faux ! Donc $\lambda = 0$, puis par liberté de la famille $(l_1, l_2, \dots, l_n)$, $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$.
Nous pouvons maintenant prouver le théorème. Considérons q l'entier naturel maximal tel que qu'en en considérant des éléments $g_{i_1}, g_{i_2}, \dots, g_{i_q}$ de la famille génératrice,

$$l_1, l_2, \dots, l_n, g_{i_1}, g_{i_2}, \dots, g_{i_q}$$

soit une famille libre. Alors, si par l'absurde, cette famille n'était pas génératrice :

$$\text{Vect}(l_1, l_2, \dots, l_n, g_{i_1}, g_{i_2}, \dots, g_{i_q}) \subsetneq \text{Vect}(g_1, g_2, \dots, g_p)$$

Donc il existerait $i_{q+1} \in [\![1, p]\!]$ tel que :

$$g_{i_{q+1}} \notin \text{Vect}(l_1, l_2, \dots, l_n, g_{i_1}, g_{i_2}, \dots, g_{i_q})$$

la famille

$$l_1, l_2, \dots, l_n, g_{i_1}, g_{i_2}, \dots, g_{i_q}, g_{i_{q+1}}$$

serait alors libre par le lemme, ce qui contredit la maximalité de q. La famille est donc une base.

■

Un cas particulier de ce théorème est celui dans lequel la famille libre n'a aucun élément :

Théorème 9.1.22 (de la base extraite) : *Soit $(g_1, g_2, \dots, g_p)$ une famille génératrice de E non nul. Alors il est possible d'extraire une base de cette famille génératrice, c'est-à-dire*

$$\exists q \leqslant p, \exists (i_k)_{k \in [\![1,q]\!]} \in [\![1, p]\!]^q, \quad (g_{i_1}, g_{i_2}, \dots, g_{i_q}) \text{ est une base de } E.$$

Exemple(s) 124 :

124.1 Bien souvent, on complète une famille libre par des éléments d'une base canonique. Par exemple, la famille $\{(1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$ est libre, et en la complétant par un élément de la base canonique, $\{(1, 1, 0), (1, 1, 1), (1, 0, 0)\}$ est une base.

124.2 Dans $\mathbb{R}^3$, la famille $\{(1, -1, 0), (0, 1, -1), (1, 0, -1)\}$ est liée, il ne s'agit donc pas d'une base du plan

$$\Pi = \text{Vect}((1, -1, 0), (0, 1, -1), (1, 0, -1)).$$

Mais la famille extraite $\{(1, -1, 0), (0, 1, -1)\}$ est une base de F.

9.1.5 Dimension finie

Définition 9.1.48 : *Un espace vectoriel E est dit de dimension finie s'il admet une famille génératrice (finie).*

Remarque(s) 78 :

1. $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}_n[X]$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ sont de dimension finie.
2. Par le théorème de la base extraite, E est de dimension finie si et seulement si il admet une base (finie).

Théorème 9.1.23 (lemme d'échange de Steinitz) : *Soit $l_1, l_2, \dots, l_n$ une famille libre de E et $g_1, g_2, \dots, g_m$ une famille génératrice de E. Alors $n \leqslant m$ et quitte à permuter les vecteurs de la famille génératrice, la famille :*

$$l_1, l_2, \dots, l_n, g_{n+1}, \dots, g_m$$

est génératrice de E.

Démonstration : Procédons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$. Si $n = 0$ il n'y a rien à montrer. supposons le théorème vrai pour $n \in \mathbb{N}$ fixé et supposons que $l_1, l_2, \dots, l_n, l_{n+1}$ est une famille libre de E et $g_1, g_2, \dots, g_m$ une famille génératrice de E. Par hypothèse de récurrence, comme $l_1, l_2, \dots, l_n$ est libre $n \leqslant m$ et quitte à permuter les vecteurs de la famille génératrice,

$$l_1, l_2, \dots, l_n, g_{n+1}, \dots, g_m$$

est génératrice de E. En particulier, il existe des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ tels que :

$$\lambda_1.l_1 + \lambda_2.l_2 + \cdots + \lambda_n.l_n + \lambda_{n+1}.g_{n+1} + \cdots + \lambda_m.g_m = l_{n+1}.$$

si par l'absurde $\lambda_{m+1} = \cdots = \lambda_m = 0$ alors la famille $l_1, l_2, \dots, l_n, l_{n+1}$ serait liée. Absurde ! Au moins l'un de ces scalaires est donc non nul et quitte à permuter les vecteurs de la famille génératrice, on peut supposer $\lambda_{n+1} \neq 0$. Mais alors :

$$g_{n+1} = -\frac{\lambda_1}{\lambda_{n+1}}.l_1 - \cdots - \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}.l_n + l_{n+1} - \frac{\lambda_{n+2}}{\lambda_{n+1}}.g_{n+2} - \cdots - \frac{\lambda_m}{\lambda_{n+1}}.g_m$$

on en déduit :

$$\mathrm{Vect}(l_1, \dots, l_n, l_{n+1}, g_{n+2}, \dots, g_m) = \mathrm{Vect}(l_1, \dots, l_n, g_{n+1}, \dots, g_m) = E$$

la famille $l_1, \dots, l_n, l_{n+1}, g_{n+2}, \dots, g_m$ est donc génératrice (et en particulier $m \geqslant n+1$), ce qui achève la preuve de l'hérédité et donc la preuve du théorème.

■

Remarque(s) 79 : En particulier, si $\mathcal{G}$ une famille génératrice et $\mathcal{L}$ une famille libre de E. Alors :

$$\boxed{\mathrm{Card}(\mathcal{L}) \leqslant \mathrm{Card}(\mathcal{G}).}$$

Proposition 9.1.14 : ***(définition de la dimension)*** *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Alors toutes les bases de E ont le même nombre d'éléments. On appelle ce nombre dimension de E et on le note* $\dim_{\mathbb{K}}(E)$.

Démonstration : Soit $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ deux bases de E. Alors comme $\mathcal{B}_1$ est libre et $\mathcal{B}_2$ est génératrice donc $\mathrm{Card}(\mathcal{B}_1) \leqslant \mathrm{Card}(\mathcal{B}_2)$ par le lemme de Steinitz et l'égalité s'obtient par symétrie.

■

En utilisant les bases canoniques, on en déduit :

Exemple(s) 125 :

125.1 $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^n) = n$,

125.2 $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}_n[x]) = n + 1$,

125.3 $\dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{M}_{n,k}(\mathbb{K})) = n \times k$.

125.4 Si $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une famille libre de E, alors : $\dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_n) = n$.

125.5 E est de dimension 0 si et seulement si $E = \{0_E\}$

125.6 Un espace vectoriel de dimension 1 est appelé **droite vectorielle** et un espace vectoriel de dimension 2 **plan vectoriel**. Par exemple : $\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(\cos, \sin)$ est un plan vectoriel.

Propriété(s) 9.1.53 : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et F un sous-espace vectoriel de E. Alors F est de dimension finie et

$$\dim_{\mathbb{K}} F \leqslant \dim_{\mathbb{K}} E$$

de plus, $\dim_{\mathbb{K}} F = \dim_{\mathbb{K}} E$ si et seulement si $E = F$.

Démonstration : Comme toute famille libre de F est une famille libre de E, de dimension finie, par le lemme de Steinitz, une telle famille ne peut être infinie. Considérons donc une famille $f_1, f_2, \dots, f_p$ libre de F, de cardinal maximal. Par le lemme de la preuve du théorème de la base incomplète, s'il existait $x \in F$ tel que $x \notin \mathrm{Vect}(f_1, f_2, \dots, f_p)$ alors $f_1, f_2, \dots, f_p, x$ serait une famille libre et aurait plus d'éléments que $f_1, \dots, f_p$. Absurde ! La famille $f_1, \dots, f_p$ est donc génératrice de F, qui est en conséquence de dimension finie.

Montrons l'inégalité. Si $\mathcal{B}_F$ est une base de F, alors c'est une famille libre de E donc par le lemme de Steinitz, si $\mathcal{B}_E$ est une base (donc une famille génératrice) de E,

$$\dim_{\mathbb{K}} F = \text{Card}(\mathcal{B}_F) \leqslant \text{Card}(\mathcal{B}_E) = \dim_{\mathbb{K}} E.$$

Procédons par contraposée pour montrer le deuxième point. Supposons que F est strictement inclus dans E, alors par le théorème de la base incomplète, on peut compléter $\mathcal{B}_F$ en une base $\mathcal{B}$ de E donc :

$$\dim_{\mathbb{K}} F = \text{Card}(\mathcal{B}_F) < \text{Card}(\mathcal{B}) = \dim_{\mathbb{K}} E.$$

■

Remarque(s) 80 : Attention, on ne peut pas extraire de toute base de E une base de F, comme le montre l'exemple $E = \mathbb{R}^2$ muni de la base canonique et $F = \text{Vect}((1,1))$. L'idée de la preuve est toujours de partir d'une base de F et de la compléter pour obtenir une base de E.

Exemple(s) 126 :

126.1 Considérons les espaces vectoriels :

$$\Pi = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad x+y+z=0\} \quad \text{et} \quad P = \text{Vect}((1,1,-2),(1,-2,1)).$$

Alors, Π est un plan de l'espace donc $\dim(\Pi) = 2$. Mais $(1,1,-2) \in \Pi$ et $(1,-2,1) \in \Pi$ donc $P \subset \Pi$. Enfin, $(1,1,-2),(1,-2,1)$ est une famille génératrice par définition et libre (facilement) de P donc c'est une base de P. Donc $\dim(P) = 2$. D'où $P = \Pi$.

126.2 Dans $E = \mathbb{K}_5[X]$, on considère $F = \{P \in E, \quad P(0) = 0\}$. Alors $\dim(F) \leqslant \dim(E) = 6$ et $1 \notin F$ donc $\dim(F) \neq 6$. Enfin, X, X^2, X^3, X^4 et X^5 sont des éléments de F et cette famille est libre donc $\dim(F) \geqslant \dim(\text{Vect}(X, X^2, X^3, X^4, X^5)) = 5$. Donc $\dim(F) = 5$.

Remarque(s) 81 : En particulier, la dimension de l'espace vectoriel engendré par une famille $(e_1, e_2, \ldots, e_k)$ est toujours inférieure ou égale à la dimension de E. On appelle cette dimension le **rang** de la famille et on note :

$$\text{rg}(e_1, e_2, \ldots, e_k) = \dim_{\mathbb{K}} \text{Vect}_{\mathbb{K}}(e_1, e_2, \ldots, e_k).$$

Exemple(s) 127 :

127.1 La famille $(1,-1,0),(1,0,-1),(0,1,-1)$ est de rang 2. En effet, la famille extraite $(1,-1,0),(1,0,-1)$ est une base de l'espace vectoriel engendré par ces trois vecteurs.

Propriété(s) 9.1.54 : Soit E un espace vectoriel de dimension $\mathbf{n}$ et $(e_1, e_2, \ldots, e_{\mathbf{n}})$ une famille de vecteurs de E. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est libre,
2. $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est génératrice,
3. $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est une base.

Démonstration : Clairement, le troisième point implique les deux premiers. Montrons les réciproques.

1. Si la famille est libre, alors :
$$\dim_{\mathbb{K}} \text{Vect}(e_1, e_2, \ldots, e_n) = n$$
donc par le propriété précédente, $E = \text{Vect}(e_1, e_2, \ldots, e_n)$. La famille est donc aussi génératrice.
2. Si la famille n'est pas libre, on peut grâce au théorème de la base extraite en extraire une base de l'espace vectoriel qu'elle engendre donc :
$$\dim_{\mathbb{K}} \text{Vect}(e_1, e_2, \ldots, e_n) < n$$
donc elle n'est pas génératrice. On conclut alors par contraposée.

■

Exemple(s) 128 :

128.1 Cette propriété est particulièrement utile pour montrer qu'une famille est une base. Par exemple, la famille

$$(1,1,1,1,1),(1,1,1,1,0),(1,1,1,0,0),(1,1,0,0,0),(1,0,0,0,0)$$

est une base de $\mathbb{K}^5$ car elle est libreet de cardinal 5.

128.2 De même, la famille :

$$X^4+X^3+X^2+X+1, X^3+X^2+X+1, X^2+X+1, X+1, 1$$

est une base de $\mathbb{K}_4[X]$ car elle est libre car échelonnée , de cardinal 5.

128.3 **Polynômes de Lagrange**. Soit $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ $n+1$ complexes deux à deux distincts. On pose :

$$\forall i \in [\![0,n]\!], \quad P_i = \prod_{\substack{0\leqslant j\leqslant n \\ j\neq i}} \frac{X-a_j}{a_i-a_j}.$$

Remarquons que $P_i(a_i)=1$ et, si $i\neq j$: $P_i(a_j)=0$. Soit $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ des scalaires et supposons que :

$$\sum_{k=0}^{n} \lambda_k.P_k = 0$$

alors :

$$\forall i \in [\![0,n]\!], \qquad \lambda_i = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k.P_k(a_i) = 0.$$

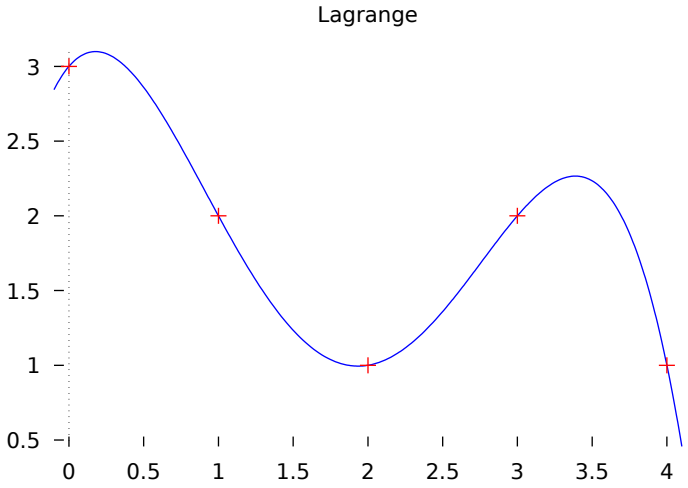
La famille de ces polynômes est donc libre dans $\mathbb{K}_n[X]$. Comme elle a le même nombre d'éléments que la dimension de $\mathbb{K}_n[X]$, il s'agit donc d'une base de $\mathbb{K}_n[X]$.
On se sert souvent de ces polynômes pour résoudre les problèmes d'interpolation : « existe-t-il une fonctin polynômiale f qui, en n points a_i $1\leqslant i\leqslant n$ prend une valeur b_i donnée ? ».

(a) *analyse* Recherchons un polynôme f de degré inférieur ou égal à n qui convient. Comme les polynômes de Lagrange sont une base de $\mathbb{K}_n[X]$, il existe $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tels que :

$$f = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k.P_k$$

En appliquant en chaque a_i, on trouve $b_i = f(a_i) = \lambda_i$.

(b) *synthèse* La formule : $f = \sum_{k=1}^{n} b_i.P_i$ convient : pour tout $0\leqslant i\leqslant n$, $f(a_i)=b_i$.



9.1.6 Sommes d'espaces vectoriels en dimension finie

Définition 9.1.49 : *Soit E un espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On dit que F et G sont supplémentaires (dans E) si : $E = F \oplus G$.*

Remarque(s) 82 : Pour montrer que F et G sont supplémentaires, il faut donc montrer que :

1. $F \cap G = \{0_E\}$ (la somme est directe)
2. $E = F + G$, c'est-à-dire que tout élément de E s'écrit comme somme d'un élément de F et d'un élément de G :

$$\forall e \in E, \exists (f, g) \in F \times G, \quad e = f + g$$

Exemple(s) 129 :

129.1 Dans le plan, deux droites passant par l'origine non confondues sont supplémentaires. Dans l'espace, une plan passant par l'origine et une droite non contenue dans ce plan sont supplémentaires.

129.2 Soit $e_1, e_2, \ldots, e_n$ une base de E. Alors, pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$

$$F = \text{Vect}(e_1, \ldots, e_k) \quad \text{et} \quad G = \text{Vect}(e_{k+1}, \ldots, e_n)$$

sont supplémentaires.

Démonstration : Soit $x \in F \cap G$. Alors : il existe des scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ et $\lambda_{k+1}, \ldots, \lambda_n$ tels que :

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i . e_i = x = \sum_{i=k+1}^{n} \lambda_i . e_i$$

donc comme la famille est libre, $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$. donc $x = 0$.
Soit $x \in E$. Alors comme la famille e_1, e_2,...,e_n est génératrice, il existe des scalaires $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ tels que :

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i.e_i = \underbrace{\sum_{i=1}^{k} \lambda_i.e_i}_{\in F} + \underbrace{\sum_{i=k+1}^{n} \lambda_i.e_i}_{\in G}.$$

■

129.3 Le sous-espace vectoriel des matrices symétriques et antisymétriques sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Démonstration : Il est possible d'écrire toute matrice comme somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique :

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \quad A = \underbrace{\frac{A + {}^tA}{2}}_{\in \mathcal{S}_n(\mathbb{K})} + \underbrace{\frac{A - {}^tA}{2}}_{\in \mathcal{A}_n(\mathbb{K})}$$

Si une matrice M est à la fois symétrique et antisymétrique, alors : $M = {}^tM = -M$ donc $M = O_n$. Donc : $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{A}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathcal{S}_n(\mathbb{K})$.

■

129.4 Dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, les fonctions paires et impaires sont supplémentaires.

Démonstration : Supposons que f est paire et impaire. Alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad -f(x) = f(-x) = f(x).$$

Donc pour tout réel x, $f(x) = 0$. Montrons maintenant que toute fonction f est somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire :

(a) *analyse* : s'il existe p paire et i impaire telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = p(x) + i(x)$$

alors : $f(-x) = p(x) - i(x)$ et donc

$$p(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \quad \text{et} \quad i(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}$$

(b) *synthèse* : on peut toujours écrire :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \underbrace{\frac{f(x) + f(-x)}{2}}_{\text{paire}} + \underbrace{\frac{f(x) - f(-x)}{2}}_{\text{impaire}}.$$

■

Remarque(s) 83 : Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E et qui ont pour bases respectives $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$. Alors, s'ils sont en somme directe, $F \oplus G$ admet pour base $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$. On appelle une base de $F \oplus G$ qui n'est constituée que d'éléments de F et de G une **base adaptée** à cette somme directe.

Démonstration : La famille est génératrice car pour tout $x \in E$, comme $E = F + G$ $x = f + g$ avec $f \in F$ et $g \in G$. Donc comme $\mathcal{B}_G$ est génératrice de G et $\mathcal{B}_F$ est génératrice de F x s'écrit comme combinaison linéaire d'éléments de $\mathcal{B}_F \cup \mathcal{B}_G$.
La famille est libre, car s'il existe des scalaires tels que :

$$\sum_{f \in \mathcal{B}_F} \lambda_f.f + \sum_{g \in \mathcal{B}_G} \lambda_g.g = 0$$

alors comme la somme est directe, chacune de ces sommes est nulle puis comme $\mathcal{B}_F$ est une famille libre de F, chaque λ_f est nul et de même comme $\mathcal{B}_G$ est libre, chaque λ_g est nul.

■

Attention : il n'y a à priori aucune raison pour qu'une base de $F \oplus G$ soit adaptée, comme le montre l'exemple de la base $\{(1,0),(0,1)\}$ qui n'est pas adaptée à la somme directe $\text{Vect}(1,1) \oplus \text{Vect}(0,1)$.

Propriété(s) 9.1.55 : (existence d'un supplémentaire) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et F un sous-espace vectoriel de E. Alors F admet un supplémentaire, c'est-à-dire il existe G un sous-espace vectoriel de E tel que $E = F \oplus G$.

Démonstration : On considère $\mathcal{B}_F = \{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ une base de F et $\mathcal{B}_E$ une base de E. Alors $\mathcal{B}_F$ est une famille libre de E donc on peut la compléter par des éléments de la famille génératrice $\mathcal{B}_E$, que l'on note $e_1, e_2, \dots, e_k$. Alors comme la famille obtenue est génératrice puis libre :

$$E = \text{Vect}(f_1, f_2, \dots, f_n, e_1, e_2, \dots, e_k) = \text{Vect}(f_1, f_2, \dots, f_n) \oplus \text{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_k) = F \oplus \underbrace{\text{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_k)}_{=G}.$$

■

Exemple(s) 130 :

130.1 La preuve de cette propriété nous permet d'obtenir explicitement un tel supplémentaire en complétant une base. Par exemple, cherchons un supplémentaire du sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$:

$$E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, \quad x + y = 0\}$$

Commençons par déterminer le dimension de E. On peut réécrire :

$$E = \{(x, -x, z, t), \quad (x, z, t) \in \mathbb{R}^3\} = \text{Vect}((0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1), (1, -1, 0, 0))$$

la famille $(0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1), (1, -1, 0, 0)$ est donc génératrice et elle est clairement libre, c'est donc une base de E. L'espace E est de dimension 3. Pour construire un supplémentaire de E, il suffit alors de compléter cette famille de trois vecteurs en une base de $\mathbb{R}^4$. Mais $(1, 0, 0, 0) \notin E = \text{Vect}((0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1), (1, -1, 0, 0))$ donc la famille $(0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1), (1, -1, 0, 0), (1, 0, 0, 0)$ est libre et a quatre éléments. C'est donc une base de $\mathbb{R}^4$. Un supplémentaire de E est donc la droite vectorielle :

$$F = \text{Vect}(1, 0, 0, 0).$$

Théorème 9.1.24 (formule de Grassmann) : *Soit F et G deux sous-espaces vectoriels du $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie E. Alors :*

$$\dim_{\mathbb{K}}(F + G) = \dim_{\mathbb{K}} F + \dim_{\mathbb{K}} G - \dim_{\mathbb{K}}(F \cap G).$$

Démonstration :

1. Commençons par remarquer que si F et G sont en somme directe, alors une base de $F \oplus G$ est donnée par la réunion des bases de F et G donc :
$$\dim_{\mathbb{K}}(F \oplus G) = \dim_{\mathbb{K}} F + \dim_{\mathbb{K}} G.$$
2. Utilisons maintenant la propriété précédente. On considère F' un supplémentaire de $F \cap G$ dans F, c'est-à-dire : $F = F' \oplus F \cap G$.
3. Montrons maintenant que $F + G = F' \oplus G$:
   (a) Si $x \in F \cap G$ alors $x \in F' \cap G$ et $x \in F'$ donc comme ces deux espaces sont en somme directe, $x = 0_E$.
   (b) Clairement, $F' + G \subset F + G$. Si $x \in F + G$ alors il existe $(f, g) \in F \times G$ tels que $x = f + g$. De plus, $F = F' \oplus F \cap G$ donc il existe $f' \in F'$ et $i \in F \cap G$ tels que $f = f' + i$ mais alors :
   $$x = f + g = \underbrace{f'}_{\in F'} + \underbrace{i + g}_{\in G}.$$
   (c) On applique alors deux fois le premier point :
   $$\dim_{\mathbb{K}}(F + G) = \dim_{\mathbb{K}}(F' \oplus G) = \dim_{\mathbb{K}} F' + \dim_{\mathbb{K}} G = \dim_{\mathbb{K}} F - \dim_{\mathbb{K}} F \cap G + \dim_{\mathbb{K}} G.$$

■

Exemple(s) 131 :

131.1 Soient $E = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4, x+y+z+t=0\}$ et $F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4, x+y=z+t\}$. Déterminons la dimension de E, F, $E+F$ et $E \cap F$. On a :

$$E = \{(x,y,z,-x-y-z), \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\} = \text{Vect}((1,0,0,-1),(0,1,0,-1),(0,0,1,-1))$$

et la famille de ces trois vecteurs est clairement libre. Il s'agit donc d'une base. Donc $\dim E = 3$. De même :

$$F = \{(x,y,z,x+y-z), \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\} = \text{Vect}((1,0,0,1),(0,1,0,1),(0,0,1,-1))$$

et cette famille est clairement libre. Donc $\dim F = 3$. De plus, $(1,0,0,1) \notin E$ donc $E+F = \mathbb{R}^4$, d'où $\dim E+F = 4$. Enfin, par la formule de Grassmann,

$$\dim E \cap F = \dim E + \dim F - \dim(E+F) = 3+3-4 = 2.$$

Propriété(s) 9.1.56 : Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. $E = F \oplus G$,
2. $F \cap G = \{0_E\}$ et $\dim_{\mathbb{K}} E = \dim_{\mathbb{K}} F + \dim_{\mathbb{K}} G$,
3. $F + G = E$ et $\dim_{\mathbb{K}} E = \dim_{\mathbb{K}} F + \dim_{\mathbb{K}} G$.

Démonstration : Clairement, le premier point implique les deux autres. Montrons les réciproques :

1. Si le deuxième point est vérifié, par la formule de Grassmann :
$$\dim_{\mathbb{K}}(F+G) = \underbrace{\dim_{\mathbb{K}} F + \dim_{\mathbb{K}} G}_{=\dim_{\mathbb{K}}(E)} - \underbrace{\dim_{\mathbb{K}}(F \cap G)}_{=0}.$$
donc $F+G = E$.
2. Si le troisième point est vérifié, toujours par la formule de Grassmann :
$$\dim_{\mathbb{K}} F \cap G = \underbrace{\dim_{\mathbb{K}}(F+G)}_{=\dim_{\mathbb{K}}(E)} - (\underbrace{\dim_{\mathbb{K}} F + \dim_{\mathbb{K}} G}_{=\dim_{\mathbb{K}}(E)}) = 0$$
donc $F \cap G = \{0_E\}$.

■

9.2 Le cas euclidien

9.2.1 Produit scalaire, norme associée

Définition 9.2.50 : *Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Une application $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ est appelée produit scalaire sur E si elle est :*

1. *symétrique :* $\forall (x,y) \in E^2, \quad \varphi(x,y) = \varphi(x,y)$
2. *bilinéaire :* $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall (x,y,z) \in E^3, \quad \varphi(x+y,z) = \varphi(x,z) + \varphi(y,z), \quad$ et $\quad \varphi(\lambda.x,z) = \lambda \times \varphi(x,z).$
3. *définie positive :* $\forall x \in E, \varphi(x,x) \geqslant 0 \quad$ et $\quad \varphi(x,x) = 0 \Longrightarrow x = 0$

L'espace vectoriel E muni du produit scalaire φ est alors appelé espace préhilbertien réel et si il est de dimension finie, espace euclidien.

Remarque(s) 84 : 1. Dans cette partie, tous les espaces vectoriels seront donc des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels.

2. Par symétrie, un produit scalaire φ vérifie également :
$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall (x,y,z) \in E^3, \quad \varphi(z,x+y) = \varphi(z,x) + \varphi(z,y), \quad \text{et} \quad \varphi(z,\lambda.x) = \lambda \times \varphi(z,x).$$
C'est pour cette raison que l'on parle de bilinéarité (linéarité en les deux variables).

3. Suivant les problèmes ou professeurs, on notera un produit scalaire φ de deux vecteurs x et y : $\langle x, y\rangle$, $(x|y)$ ou (bien que votre professeur n'aime pas beaucoup cette notation) $x \cdot y$.

Exemple(s) 132 :

132.1 L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ est muni d'un produit scalaire canonique :

$$\forall x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \forall y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k \times y_k.$$

132.2 Le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$ est muni d'un produit scalaire :

$$\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, \quad \langle z, z'\rangle = \mathrm{Re}(\bar{z} \times z').$$

On peut, en identifiant une matrice à la liste de ses coefficients, munir l'espace des matrices du même produit scalaire[3].

132.3 Si $I = [a, b]$, l'espace vectoriel $E = \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$ est muni du produit scalaire (le caractère défini sera démontré au chapitre suivant) :

$$\forall (f, g) \in E^2, \quad \langle f, g\rangle = \int_a^b f(t) \times g(t)\,\mathrm{d}t.$$

132.4 Dans $\mathbb{R}_2[X]$, on peut considérer les formes bilinéaires suivantes :

$$(P, Q) = P(0)\,Q(0) + P(1)\,Q(1) \quad \langle P, Q\rangle = P(0)\,Q(0) + P(1)\,Q(1) + P(-1)\,Q(-1).$$

La première n'est pas un produit scalaire car si $P = X^2 - X \neq 0$, $(P, P) = 0$. Mais la deuxième l'est car si $P \in \mathbb{R}_2[X]$ vérifie :

$$\langle P, P\rangle = P(0)^2 + P(1)^2 + P(-1)^2 = 0$$

alors $P(0) = P(1) = P(-1) = 0$. Le polynôme P, de degré inférieur ou égal à 2 s'annule donc en trois points distincts, ce qui n'est possible que si $P = 0$.
Il est en particulier intéressant de remarquer que $\mathbb{R}_2[X]$ admet deux produits scalaires différents : celui de l'exemple précédent et celui de cet exemple.

Définition 9.2.51 : *Soit $(E, \langle ., .\rangle)$ un espace préhilbertien réel. La norme associée à ce produit scalaire sur E est définie par :*

$$\forall x \in E, \quad \|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}.$$

Exemple(s) 133 :

133.1 L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ est muni d'un produit scalaire canonique admet pour norme associée :

$$\forall x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}.$$

133.2 Le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$ est muni d'un produit scalaire que l'on vient de définir admet pour norme associée :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \|z\| = |z|.$$

133.3 Si $I = [a, b]$, l'espace vectoriel $E = \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$ est muni du produit scalaire :

$$\forall f \in E, \quad \|f\| = \sqrt{\int_a^b f^2(t)\,\mathrm{d}t}.$$

3. Et on montre qu'il peut s'exprimer grâce à la formule $\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(A \times {}^tB)$

Remarque(s) 85 : La norme associée à un produit scalaire provient, par définition, d'un produit scalaire. Il est possible d'aller dans l'autre sens grâce à l'**identité de polarisation** :

$$\forall (x,y) \in E^2, \quad \langle x,y\rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right)$$

Démonstration : Il s'agit essentiellement de savoir développer la partie droite de l'égalité :

$$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \|x\|^2 + 2\langle x,y\rangle + \|y\|^2$$

$$\|x-y\|^2 = \langle x-y, x-y\rangle = \|x\|^2 - 2\langle x,y\rangle + \|y\|^2$$

Il suffit alors de faire la différence des deux lignes pour conclure.

■

9.2.2 Propriétés des produits scalaires

Théorème 9.2.25 (inégalité de Cauchy-Schwarz) : *Soit $(E, \langle .,. \rangle)$ un espace préhilbertien réel. On a :*

$$\forall (x,y) \in E^2, \quad |\langle x,y\rangle| \leqslant \|x\| \times \|y\|$$

De plus, cette inégalité est une égalité si et seulement si x et y sont colinéaires.

Démonstration : Si $y = 0$ ou, de façon équivalente, par caractère défini du produit scalaire $\|y\| = 0$, il n'y a rien à faire : l'inégalité est vérifiée et le vecteurs sont colinéaires.
On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction φ par : $\varphi(t) = \|x + t\,y\|^2$. Remarquons que φ est positive (donc en particulier ne change jamais de signe). Mais :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \varphi(t) = t^2\|y\|^2 + 2\,t\langle x,y\rangle + \|x\|^2$$

Il s'agit donc d'une fonction polynomiale de degré deux. Comme elle ne s'annule pas, son discriminant est donc négatif :

$$\Delta = 4\left(\langle x,y\rangle^2 - \|y\|^2 \times \|x\|^2\right) \leqslant 0$$

Ceci montre l'inégalité de Cauchy-Schwartz. Remarquons maintenant qu'il y a égalité si et seulement si le discriminant est nul, ou encore si et seulement si la fonction φ s'annule en un $t_0 \in \mathbb{R}$. Ou encore par le caractère défini du produit scalaire, si et seulement s'il existe un réel t_0 tel que $x = t_0.y$.

■

Exemple(s) 134 :

134.1 Soit $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. On a :

$$|\langle x,y\rangle| = \left|\sum_{k=1}^{n} x_k \times y_k\right| \leqslant \|x\| \times \|y\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2} \times \sqrt{\sum_{k=1}^{n} y_k^2}.$$

Et l'on a égalité si et seulement si les vecteurs x et y sont colinéaires.

134.2 Si f et g sont deux fonctions continues sur $[a,b]$:

$$\left|\int_a^b f(t) \times g(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \sqrt{\int_a^b f^2(t)\,\mathrm{d}t} \times \sqrt{\int_a^b g^2(t)\,\mathrm{d}t}$$

avec égalité si et seulement si f et g sont colinéaires.

134.3 Il faut savoir repérer une utilisation de l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans un exercice. Par exemple, montrons que si f est une fonction continue sur $[a,b]$, à valeurs strictement positives,

$$\left(\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right) \times \left(\int_a^b \frac{1}{f(t)}\,\mathrm{d}t\right) \geqslant (b-a)^2$$

et que cette inégalité est une égalité si et seulement si f est constante.

Démonstration : On a, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$(b-a)^2 = \left(\int_a^b \frac{1}{\sqrt{f(t)}} \times \sqrt{f(t)}\,\mathrm{d}t\right)^2 \leqslant \left(\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right) \times \left(\int_a^b \frac{1}{f(t)}\,\mathrm{d}t\right).$$

De plus, cette inégalité est une égalité si et seulement si $\sqrt{f}$ et $\frac{1}{\sqrt{f}}$ sont colinéaires, c.a.d. si f est constante. ■

134.4 Soit x et y deux vecteurs distincts de norme inférieure ou égale à 1. Montrons que :

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\| < 1$$

Démonstration : On a, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\|^2 = \frac{\|x\|^2 + 2\langle x,y\rangle + \|y\|^2}{4} \leqslant \frac{1+\langle x,y\rangle}{2} \leqslant \frac{1+|\langle x,y\rangle|}{2} \leqslant \frac{1+\|x\|\,\|y\|}{2} \leqslant 1.$$

De plus, si cette inégalité était une égalité, $\|x\| = \|y\| = 1$ et par le cas d'égalité de Cauchy-Schwarz :

$$\exists \lambda \in \mathbb{R},\ x = \lambda.y$$

et enfin $|\langle x,y\rangle| = \langle x,y\rangle$ donc $\lambda \in \mathbb{R}_+$ puis comme $\|x\| = \|y\| = 1$, $\lambda = 1$. Donc $x = y$, ce qui est exclus par hypothèse.

■

Proposition 9.2.15 : *Soit $\|.\|$ la norme associée au produit scalaire d'un espace préhilbertien E. Alors :*

1. *elle est définie :* $\forall x \in E,\quad \|x\| = 0 \iff x = 0_E$
2. *elle est homogène :* $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R},\quad \|\lambda.x\| = |\lambda| \times \|x\|$
3. *elle vérifie l'inégalité triangulaire :*

$$\forall (x,y) \in E^2,\quad \|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$$

avec égalité si et seulement si x et y sont colinéaires, de même sens : $\exists (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}_+ \setminus \{(0,0)\},\ \lambda.x = \mu.y$.

Démonstration : Le premier point est immédiat par la définition. Pour le deuxième, on remarque que, si $x \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\|\lambda.x\|^2 = \langle \lambda.x, \lambda.x\rangle = \lambda^2 \times \|x\|^2.$$

Pour le dernier point, il s'agit encore de comparer les carrés. Soit $(x,y) \in E^2$. On a, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x,y\rangle + \|y\|^2 \leqslant \|x\|^2 + 2\|x\| \times \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2$$

et cette inégalité est une égalité si et seulement si :

$$\langle x,y\rangle = \|x\| \times \|y\| \iff \langle x,y\rangle = |\langle x,y\rangle| = \|x\| \times \|y\|.$$

La deuxième égalité équivaut à la colinéarité de x et y et la première au fait qu'ils sont de même sens.

■

Exemple(s) 135 :

135.1 Si f et g sont deux fonctions continues sur $[a,b]$, on a :

$$\sqrt{\int_a^b (f(t)+g(t))\,\mathrm{d}t} \leqslant \sqrt{\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t} + \sqrt{\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t}$$

avec égalité si et seulement si f et g sont colinéaires, de même sens.

9.2.3 Familles de vecteurs et orthogonalité

Définition 9.2.52 : *Soit $(E, \langle ., . \rangle)$ un espace préhilbertien. Deux vecteurs x et y sont dits orthogonaux si $\langle x, y \rangle = 0$.*

Exemple(s) 136 :

136.1 Pour le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$, les éléments de la base canonique sont deux à deux orthogonaux : si $i \neq j$ $\langle e_i, e_j \rangle = 0$.

136.2 Pour le produit scalaire $\langle z, z' \rangle = \mathrm{Re}(\bar{z} \times z')$, les vecteurs 1 et i sont orthogonaux.

Propriété(s) 9.2.57 : (théorème de Pythagore) Les vecteurs x et y sont orthogonaux si et seulement si :

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Démonstration : Il suffit de se rappeler que :

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x, y \rangle.$$

L'égalité est donc vraie si et seulement si $\langle x, y \rangle = 0$ ou encore si les vecteurs x et y sont orthogonaux.

■

Définition 9.2.53 : *Soit $(v_2, v_2, \ldots, v_n)$ une famille de vecteurs de $(E, \langle ., . \rangle)$, un espace préhilbertien. On dit que la famille est :*

1. *orthogonale si : $\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2, i \neq j \quad \langle v_i, v_j \rangle = 0$,*
2. *orthonormale (ou orthonormée) si elle est orthogonale et si : $\forall i \in [\![1, n]\!], \quad \|v_i\| = 1$.*

Si de plus, la famille est une base de E, on dit que c'est une base orthonormée de l'espace.

Exemple(s) 137 :

137.1 La base canonique de $\mathbb{R}^n$ est une base orthonormée.

137.2 La famille des $(x \mapsto \cos(k \times x))_{k \in [\![1,n]\!]}$ est une famille orthogonale de $\mathcal{C}^0([0, 2\,\pi], \mathbb{R})$ muni de son produit scalaire habituel : en effet, si $i \neq j$ sont deux entiers compris entre 1 et n :

$$\begin{aligned}\int_0^{2\,\pi} \cos(i \times x) \times \cos(j \times x)\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int_0^{2\,\pi} (\cos((i+j) \times x) + \cos((i-j) \times x))\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin((i+j) \times x)}{i+j} + \frac{\sin((i-j) \times x)}{i-j}\right]_{x=0}^{x=2\,\pi} = 0\end{aligned}$$

Propriété(s) 9.2.58 : Soit $(v_2, v_2, \ldots, v_n)$ une famille de vecteurs de $(E, \langle ., . \rangle)$, un espace préhilbertien. Alors :

1. Si elle est orthogonale et constituée de vecteurs non nuls, elle est libre.
2. S'il s'agit d'une base orthonormée, alors :

$$\forall x \in E, \quad x = \sum_{k=1}^{n} \langle x, v_k \rangle . v_k$$

en particulier, les coordonnées de x dans cette base sont $(\langle x, v_1 \rangle, \langle x, v_2 \rangle, \ldots, \langle x, v_n \rangle)$.

3. Réciproquement, si x et y ont pour coordonnées $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ et $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ dans une base orthonormée :

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k \times y_k, \quad \text{donc} \quad \|x\|^2 = \sum_{k=1}^{n} x_k^2.$$

Démonstration :

1. Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$. Supposons que :
$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k.v_k = 0_E$$
Alors, comme la famille est orthogonale, si $i \in [\![1, n]\!]$:
$$\lambda_i \times \|v_i\|^2 = \left\langle v_i, \sum_{k=1}^{n} \lambda_k.v_k \right\rangle = 0$$
donc comme $v_i \neq 0_E$, $\|v_i\| \neq 0$ d'où $\lambda_i = 0$. Ceci étant vrai pour tout i, la famille est donc libre.
2. Supposons que la famille est une base orthonormale. Alors, si $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ sont les coordonnées de x dans cette base :
$$x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k.v_k$$
Alors, comme la famille est orthonormale, si $i \in [\![1, n]\!]$:
$$\lambda_i \times \underbrace{\|v_i\|^2}_{=1} = \left\langle v_i, \sum_{k=1}^{n} \lambda_k.v_k \right\rangle = \langle x, v_i \rangle.$$
3. Le dernier point est un calcul direct. On a :
$$\left\langle \sum_{k=1}^{n} x_k.v_k, \sum_{l=1}^{n} y_l.v_l \right\rangle = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} x_k \times y_l \times \underbrace{\langle v_k, v_l \rangle}_{=0 \text{ sauf si } k=l} = \sum_{k=1}^{n} x_k \times y_k \times \underbrace{\|v_k\|^2}_{=1}.$$

■

Théorème 9.2.26 (orthonormalisation de Gram-Schmidt) : *Soit $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ une famille libre de E, un espace préhilbertien réel. Alors il existe $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ une famille orthonormée de E telle que :*
$$\text{Vect}(v_1, v_2, \dots, v_n) = \text{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_n).$$

Démonstration : On procède par récurrence sur n.

1. si $n = 1$, il suffit de poser $e_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}$.
2. supposons le résultat vrai pour toute famille libre de n vecteurs et considérons une famille libre de $n+1$ vecteurs $(v_1, v_2, \dots, v_{n+1})$. On applique le résultat à la famille des n premiers vecteur, ce qui nous donne une famille orthonormée $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ telle que :
$$\text{Vect}(v_1, v_2, \dots, v_n) = \text{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_n).$$
De plus, le vecteur :
$$w_{n+1} = v_{n+1} - \sum_{k=1}^{n} \langle v_{n+1}, e_k \rangle.e_k \tag{9.1}$$
vérifie, pour tout entier i compris entre 1 et n :
$$\langle w_{n+1}, e_i \rangle = \langle v_{n+1}, e_i \rangle - \sum_{k=1}^{n} \langle v_{n+1}, e_k \rangle \times \underbrace{\langle e_k, e_i \rangle}_{=0 \text{ si } i\neq k,\ =1 \text{ si } i=k} = \langle v_{n+1}, e_i \rangle - \langle v_{n+1}, e_i \rangle = 0$$
le vecteur w_{n+1} est donc orthogonal à tous les vecteurs de $(e_1, e_2, \dots, e_n)$. Pour le normaliser, on pose alors $e_{n+1} = \frac{w_{n+1}}{\|w_{n+1}\|}$ en remarquant que w_{n+1} ne peut être nul car la famille est libre. Reste à remarquer que :
$$\text{Vect}(v_1, v_2, \dots, v_n, v_{n+1}) = \text{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_n, v_{n+1}) \underbrace{=}_{11.1} \text{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_n, w_{n+1}) = \text{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_n, e_{n+1}).$$

■

Remarque(s) 86 : 1. En particulier, tout espace vectoriel de dimension finie admet une base orthonormée.

2. La preuve de ce théorème nous donne en particulier une méthode pratique pour calculer la famille orthonormée à partir de la famille de départ.

Exemple(s) 138 :

138.1 Utilisons ce procédé pour orthonormaliser la famille :

$$v_1 = (1,1,0),\ v_2 = (0,1,1),\ v_3 = (1,0,1).$$

On pose : $e_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$. Puis :

$$w_2 = v_2 - \langle v_2, e_1\rangle . e_1 = (0,1,1) - \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right) \quad \text{et} \quad e_2 = \frac{w_2}{\|w_2\|} = \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right).$$

Enfin,

$$w_3 = v_3 - \langle v_3, e_1\rangle . e_1 - \langle v_3, e_2\rangle . e_2 = \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) \quad \text{et} \quad e_3 = \frac{w_3}{\|w_3\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

138.2 Rappelons maintenant que comme une fonction polynomiale de degré deux ou moins qui qui s'annule en trois points distincts est nulle, l'expression :

$$\forall (P,Q) \in \mathbb{R}_2[X], \quad \langle P, Q\rangle = P(-1) \times Q(-1) + P(0) \times Q(0) + P(1) \times Q(1)$$

est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[X]$. Orthonormalisons la base canonique, $1, X, X^2$ pour ce produit scalaire. On trouve :

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad w_1 = X - \langle v_2, e_1\rangle . e_1 = X, \quad e_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|} = \frac{X}{\sqrt{2}}$$

enfin,

$$w_3 = X^2 - \langle v_3, e_1\rangle . e_1 - \langle v_3, e_2\rangle . e_2 = X^2 - \frac{2}{3}, \quad e_3 = \sqrt{\frac{3}{2}}\left(X^2 - \frac{2}{3}\right).$$

9.2.4 Orthogonal et supplémentaire

Définition 9.2.54 : *Soit A un sous-ensemble d'un espace préhilbertien réel E. On appelle orthogonal de A et on note $A^\perp$ l'ensemble des vecteurs orthogonaux à A, c'est-à-dire :*

$$A^\perp = \{x \in E, \forall a \in A, \quad \langle a, x\rangle = 0\}.$$

Exemple(s) 139 :

139.1 L'orthogonal pour le produit scalaire usuel à la droite du plan d'équation :

$$a\,x + b\,y = 0$$

est l'espace vectoriel $\mathrm{Vect}((a,b))$.

139.2 L'orthogonal pour le produit scalaire usuel au plan de l'espace d'équation :

$$a\,x + b\,y + c\,z = 0$$

est l'espace vectoriel $\mathrm{Vect}((a,b,c))$.

139.3 Attention ! L'orthogonal d'un ensemble dépend à priori du produit scalaire choisi. Par exemple, si l'on considère le produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$:

$$\langle (x,y), (x',y')\rangle = x \times x' + 2\,y \times y' + x \times y' + y \times x'$$

le vecteur $(1,1)$ n'est pas orthogonal à le droite d'équation $x + y = 0$: $\langle (1,1), (1,-1)\rangle = -1 \neq 0$.

Propriété(s) 9.2.59 : Pour tout sous-ensemble A de E, $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration : Clairement, $0_E \in A^\perp$. De plus, si $(x, y) \in A^\perp$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\forall a \in A, \quad \langle x+y, a\rangle = \langle x, a\rangle + \langle y, a\rangle = 0 \quad \text{et} \quad \langle \lambda.x, a\rangle = \lambda \times \langle x, a\rangle = 0$$

donc $x + y \in A^\perp$ et $\lambda.x \in A^\perp$.

■

Théorème 9.2.27 : *Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E un espace préhilbertien réel. Alors F et $F^\perp$ sont supplémentaires dans E :*

$$E = F \oplus F^\perp.$$

Démonstration : Procédons comme d'habitude :

1. Si $x \in F \cap F^\perp$ alors par définition : $\|x\|^2 = \langle x, x\rangle = 0$ donc $x = 0_E$ par caractère défini de la norme.
2. Montrons maintenant que tout élément de E peut s'écrire comme la somme d'un élément de F et de son orthogonal. Soit $x \in E$. Alors par le théorème d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, il existe $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de F. On remarque que :

$$x = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k\rangle.e_k}_{\in F} + \left(x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k\rangle.e_k\right).$$

Et que le deuxième élément de cette somme appartient à l'orthogonal de F car :

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \quad \left\langle e_k, x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k\rangle.e_k \right\rangle = \langle x, e_k\rangle - \langle x, e_k\rangle = 0.$$

■

Remarque(s) 87 : En particulier, si E un espace vectoriel de dimension finie et F un sous-espace vectoriel de E. Alors : $\boxed{\dim(F^\perp) = \dim(E) - \dim(F).}$

Chapitre 10

Continuité, dérivabilité

10.1 Limite d'une fonction

10.1.1 Notion de voisinage, définition

Notation(s) : 1. Soit I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$, nous noterons $\overline{I}$, l'ensemble des points *adhérents* à I, de la manière suivante :

I	$\overline{I}$
$[a,b]$	$[a,b]$
$]a,b[$	$[a,b]$
$]a,b]$	$[a,b]$
$[a,b[$	$[a,b]$
$[a,+\infty[$	$[a,+\infty]$
$]a,+\infty[$	$[a,+\infty]$
$]-\infty,a]$	$[-\infty,a]$
$]-\infty,a[$	$[-\infty,a]$
$]-\infty,+\infty[$	$[-\infty,+\infty]$

2. On soit $a \in \overline{I}$. On appelle **voisinage** de a (dans I) :
   (a) si $a \in \mathbb{R}$ tout ensemble de la forme $I \cap [a-\eta, a+\eta]$ $(\eta > 0)$,
   (b) si $a = +\infty$ tout ensemble de la forme $I \cap [A, +\infty[$ où $A \in \mathbb{R}_+^*$,
   (c) si $a = -\infty$ tout ensemble de la forme $I \cap]-\infty, B]$ où $B \in \mathbb{R}_-^*$.

Définition 10.1.55 : *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, f une fonction définie sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soit $\lambda \in \overline{\mathbb{R}}$, et $a \in \overline{I}$, alors on dit que $f(x)$ tend vers λ si x tend vers a et on note $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \lambda$ si :*

Pour tout voisinage W de λ, il existe un voisinage V de a, tel que, si $x \in V$ alors $f(x) \in W$.

Remarque(s) 88 : 1. Notez que dans la définition, V est un voisinage dans I alors que W est un voisinage dans $\mathbb{R}$.

2. Cette définition a l'avantage de la généralité, mais on aura parfois besoin d'une définition « avec des ϵ ». Voyons quelques cas importants :
   (a) Si $(a,\lambda) \in \mathbb{R}^2$: on dit que $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \lambda$ si :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I, \quad |x-a| \leqslant \eta \Longrightarrow |f(x)-\lambda| \leqslant \epsilon.$$

   Cette définition se généralise sans difficulté si $\lambda \in \mathbb{C}$ (contrairement aux autres) en « remplaçant » les valeurs absolues par des modules.

(b) Si $\lambda = +\infty$ et $a = +\infty$: on dit que $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ si :

$$\forall A > 0,\ \exists C > 0,\ \forall x \in I,\ x > C \implies f(x) \geqslant A.$$

(c) Si $\lambda = +\infty$ et $a \in \mathbb{R}$: on dit que $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} +\infty$ si :

$$\forall A > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in I,\ |x - a| \leq \eta \implies f(x) \geqslant A.$$

3. Si $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} l$ et $l \in \mathbb{R}$, on dit que f **converge** en a. Sinon, on dit que f **diverge** en a.

Il est utile de savoir utiliser ces définitions pour montrer une propriété d'une fonction « au voisinage d'un point » [1]

Exemple(s) 140 :

140.1 Supposons que f converge en $a \in \overline{I}$ alors f est bornée sur un voisinage de a dans I.

Démonstration : On choisit pour voisinage de la limite $l \in \mathbb{R}$ $W = [l-1, l+1]$ alors il existe V un voisinage de a dans I tel que :

$$\forall x \in V, \quad f(x) \in W = [l-1, l+1]$$

donc f est bornée sur ce voisinage.

■

140.2 Parfois, le voisinage est un peu pus « caché ». Supposons que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \lambda > 0$. Montrons que :

$$\exists A > 0, \forall x \in I, \quad x \geqslant A \Longrightarrow f(x) \geqslant \frac{\lambda}{2}.$$

Démonstration : On considère le voisinage $W = [\lambda - \lambda/2, \lambda + \lambda/2]$ de λ. Alors par définition, il existe un voisinage $V = [A, +\infty[\cap I\ (A > 0)$ de $+\infty$ tel que si $x \in V$ alors $f(x) \in W$. Donc :

$$\forall x \in I, \quad x \geqslant A \Longrightarrow f(x) \geqslant \frac{\lambda}{2}.$$

■

10.1.2 Limites à droite, à gauche, caractérisation séquentielle de la limite

Définition 10.1.56 : *Soit f une fonction définie sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soit $a \in \overline{I}$ et $\lambda \in \overline{\mathbb{R}}$. Alors on dit que f tend vers λ à droite de a et on note $f(x) \xrightarrow[x\to a^+]{} \lambda$ ou $f(x) \underset{\substack{x\to a\\ x>a}}{\longrightarrow} \lambda$ si :*

Pour tout voisinage W de λ, il existe un voisinage V de a tel que si $x \in V$ et $x > a$ alors $f(x) \in W$.

Remarque(s) 89 :

1. On peut bien entendu aussi parler de limite à droite (notée $f(x) \xrightarrow[x\to a^-]{} \lambda$ ou $f(x) \underset{\substack{x\to a\\ x<a}}{\longrightarrow} \lambda$).
2. Si $a \in I$, on a alors immédiatement :

$$f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} l \Longleftrightarrow \left[f(a) = l, \quad \text{et} \quad f(x) \underset{x\to a^-}{\longrightarrow} l, \quad \text{et} \quad f(x) \underset{x\to a^+}{\longrightarrow} l \right]$$

Ce résultat est en particulier utile pour montrer qu'une fonction n'admet pas de limite en un point.

Exemple(s) 141 :

1. L'équivalent d'« à partir d'un certain rang » pour les suites.

141.1 La fonction partie entière admet une limite à droite et à gauche en tout point.

141.2 Elle n'admet cependant de limite en aucun point entier car ses limites à droite et à gauche ne sont pas égales.

141.3 On peut se servir des limites à droite et à gauche pour montrer l'existence d'une limite. Par exemple, la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

admet pour limite 0 et 0 car :

(a) $\forall x < 0,\ f(x) = e^{-1/x^2} \underset{x\to 0^-}{\longrightarrow} 0$, (b) $\forall x > 0,\ f(x) = e^{-1/x^2} \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0$, (c) $f(0) = 0$.

Théorème 10.1.28 (caractérisation séquentielle de la limite) : *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $a \in \overline{I}$ et f une fonction définie sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soit $l \in \overline{\mathbb{R}}$.*
Alors $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} l$ si et seulement si pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de I, qui tend vers a, $f(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$.

Démonstration : Faisons la preuve dans le cas où $(a, l) \in \mathbb{R}^2$. Les autres cas se traitent de façon similaire.
Supposons que $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} l$ et soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de I, qui tend vers a. Soit $\epsilon > 0$. Par définitions :

$$\exists \eta > 0, \forall x \in I, \quad |x - a| \leqslant \eta \Longrightarrow |f(x) - l| \leqslant \epsilon \quad \text{et} \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0, \quad |x_n - a| \leqslant \eta$$

on en déduit, pour $n \geqslant n_0$: $|f(x_n) - l| \leqslant \epsilon$. Donc $f(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$.
Pour la réciproque, nous allons travailler par contraposée. Supposons que f n'admet pas pour limite l lorsque x tend vers a. Alors :

$$\exists \epsilon > 0, \forall \eta > 0, \exists x_\eta \in I, \quad |x_\eta - a| \leqslant \eta \text{ et } |f(x) - l| > \epsilon.$$

En particulier, en prenant $\eta = 1/2^n$ et en posant $x_n = x_\eta$ pour cette valeur de η, pour tout entier naturel n, $|x_n - a| \leqslant 1/2^n$ donc $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a$, mais pour tout entier naturel n, $|f(x_n) - l| > \epsilon$ donc $(f(x_n))_n$ ne tend pas vers l.

■

Remarque(s) 90 : On utilise souvent ce théorème pour montrer qu'une fonction n'admet pas de limite en x_0. Il suffit pour ceci d'exhiber deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de I telles que :

1. $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x_0$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x_0$,
2. $f(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$ et $f(v_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l'$
3. $l \neq l'$.

Exemple(s) 142 :

142.1 La fonction cos n'admet pas de limite en $+\infty$; En effet :

$$\cos(2\,n\,\pi) = 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 \quad \text{et} \quad \cos\left(2\,n\,\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 0 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

142.2 La fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

n'admet pas de limite à droite en 0, car, si $n \geqslant 1$:

$$f\left(\frac{1}{2\,\pi\,n}\right) = 0 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{et} \quad f\left(\frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\,\pi\,n}\right) = 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$

142.3 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ périodique de période p admettant une limite finie l en $+\infty$. Montrons que f est constante.
Démonstration : Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors par caractérisation séquentielle de la limite :

$$f(x) = f(x + n\,p) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$$

donc $f(x) = l$. Ceci étant vrai pour tout réel x, la fonction f est donc constante.

■

10.1.3 Adaptation des énoncés relatifs aux suites

La caractérisation séquentielle de la limite permet de « transposer » aux fonctions les énoncés que l'on a prouvé dans le chapitre sur les suites. En particulier :

1. Si une fonction admet une limite en un point, cette limite est unique.
2. Les théorèmes « généraux » concernant les limites sont prouvés :

(a)

$g \setminus f$	$\lambda \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$
$\mu \in \mathbb{R}$	$\lambda + \mu$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	FI
$-\infty$	$-\infty$	FI	$-\infty$

(b)

$g \setminus f$	$\lambda \in \mathbb{R}_+^*$	$\lambda \in \mathbb{R}_-^*$	$+\infty$	$-\infty$	0
$\mu \in \mathbb{R}_+^*$	$\lambda \times \mu$	$\lambda \times \mu$	$+\infty$	$-\infty$	0
$\mu \in \mathbb{R}_+^*$	$\lambda \times \mu$	$\lambda \times \mu$	$-\infty$	$+\infty$	0
$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	FI
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI
0	0	0	FI	FI	0

(c) Si g ne s'annule pas sur un voisinage de a :

$g \setminus f$	$\lambda \in \mathbb{R}_+^*$	$\lambda \in \mathbb{R}_-^*$	$+\infty$	$-\infty$	0
$\mu \in \mathbb{R}_+^*$	$\frac{\lambda}{\mu}$	$\frac{\lambda}{\mu}$	$+\infty$	$-\infty$	0
$\mu \in \mathbb{R}_-^*$	$\frac{\lambda}{\mu}$	$\frac{\lambda}{\mu}$	$-\infty$	$+\infty$	0
$\pm\infty$	0	0	FI	FI	0
0^+	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	FI
0^-	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI

3. Si f admet une limite (resp. limite à gauche, limite à droite) $\lambda \in \overline{\mathbb{R}}$ en $a \in \overline{\mathbb{R}}$, si g est définie au voisinage de λ et admet une limite $\mu \in \overline{\mathbb{R}}$ en λ, alors $g \circ f(x)$ admet la limite (resp. limite à gauche, limite à droite) μ en a.

   Démonstration : Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de I, l'ensemble de définition de f qui converge vers a, alors comme f admet pour limite λ en a par caractérisation séquentielle de la limite,

$$f(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \lambda$$

   donc en utilisant une deuxième fois la caractérisation séquentielle de la limite pour g (éventuellement, à partir d'un certain rang) comme g tend vers μ en λ :

$$g(f(x_n)) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mu.$$

■

Propriété(s) 10.1.60 : Soit f, g et h trois fonctions définies sur I, soit $a \in \overline{I}$.

1. (Passage à la limite dans les inégalités) Si pour tout $x \in I$, $f(x) \leqslant g(x)$, f tend vers $\lambda \in \mathbb{R}$ en a et g tend vers μ en a alors $\lambda \leqslant \mu$.
2. (Théorème de comparaison) Si, pour tout $x \in I$, $f(x) \leqslant g(x)$ et f tend vers $+\infty$ en a alors g aussi.
3. (Lemme des gendarmes) Si, pour tout $x \in I$, $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$ et f et g tendent vers la même limite λ en a, alors g aussi.

Remarque(s) 91 : Bien entendu, ces propriétés sont aussi vraies pour des limites à droite et à gauche.

Exemple(s) 143 :

143.1 Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x - 1 \leqslant \lfloor x \rfloor$ donc, comme $\lim\limits_{x\to+\infty} x - 1 = +\infty$,

$$\lim_{x\to+\infty} \lfloor x \rfloor = +\infty.$$

143.2 On a :

$$\forall x > 0, \quad -\frac{1}{x} \leqslant \frac{\sin(x)}{x} \leqslant \frac{1}{x}$$

donc par le théorème des gendarmes $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sin(x)}{x} = 0$.

143.3 Considérons la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f(x) = \frac{x}{2 + \sin\left(\frac{1}{x}\right)}.$$

Alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad |f(x)| \leqslant |x|$$

donc par le théorème des gendarmes, f admet pour limite 0 en 0.

143.4 Considérons la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad g(x) = \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor.$$

Alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad \frac{1}{x} - 1 \leqslant g(x) \leqslant \frac{1}{x}.$$

Donc par la première inégalité, g admet pour limite $+\infty$ en 0^+ et par la deuxième pour limite $-\infty$ en 0^-. De plus :

$$\forall x \in]1, +\infty[, \quad 0 \leqslant \frac{1}{x} < 1 \quad \text{donc} \quad \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = 0 \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Et on montre de même que cette fonction admet pour limite -1 en $-\infty$.

Théorème 10.1.29 (de la limite monotone) : *Soit $(a, b) \in \overline{\mathbb{R}}^2$. Soit $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ une application croissante. Alors :*

1. *(a) Si f est majorée, f converge en b^-,* *(b) sinon, $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = +\infty$.*
2. *(a) Si f est minorée, f converge en a^+,* *(b) sinon, $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = -\infty$.*

Démonstration : Nous ne prouverons que le premier point (le deuxième se prouve de la même façon) dans le cas $b = +\infty$. Supposons que f n'est bornée sur aucun voisinage de $+\infty$. Alors :

$$\forall B > 0, \forall M > 0, \exists x_0 \in [B, +\infty[, \quad f(x_0) > M.$$

Comme f est croissante, ceci implique donc :

$$\forall M > 0, \exists x_0 > 0, \quad \forall x \in [x_0, +\infty[, \quad f(x) \geqslant f(x_0) > M.$$

C'est-à-dire $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = +\infty$.
Supposons maintenant f majorée sur un voisinage de $+\infty$, c'est-à-dire :

$$\exists M_0 > 0, \exists B_0 > 0, \quad \forall x \in [B_0, +\infty[, \quad f(x) \leqslant M_0.$$

Alors, si l'on note $l = \sup f([B_0, +\infty[)$ (qui existe et est un réel fini par la théorème de la borne supérieure) et par définition de la borne supérieure,

$$\forall \epsilon > 0, \exists x_0 \in [B_0, +\infty[, \quad l - \epsilon \leqslant f(x_0)$$

donc comme f est croissante, :

$$\forall \epsilon > 0, \exists x_0 > 0, \forall x \in [x_0, +\infty[\quad \underbrace{l - \epsilon \leqslant f(x_0) \leqslant f(x) \leqslant l}_{\text{donc } |f(x) - l| \leqslant \epsilon}$$

donc $f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} l \in \mathbb{R}$.

■

Remarque(s) 92 : 1. Évidemment, il existe une version de ce théorème pour les fonctions décroissantes. Sauriez-vous en donner un énoncé ?

2. Une fonction monotone admet donc en tout point de son ensemble de définition une limite à droite et à gauche. Mais rien ne dit que ces limites sont les mêmes, comme l'indique l'exemple de la partie entière.

10.1.4 Notations de Landau

Définition 10.1.57 : *Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle I, $x_o \in \overline{I}$. On suppose que g ne s'annule pas sur un voisinage de x_0. Alors on note :*

1. $f(x) \sim_{x_0} (g(x))$ *si* $\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x\to x_0]{} 1$,
2. $f(x) = o_{x_0}(g(x))$ *si* $\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x\to x_0]{} 0$,
3. $f(x) = O_{x_0}(g(x))$ *si* $\frac{f(x)}{g(x)}$ *est bornée sur un voisinage de* x_0.

Remarque(s) 93 :

1. Si x_0 est clair dans le contexte (souvent, $x_0 = 0$), on utilisera les notations sans l'indice x_0.
2. La notation $\sim$ (équivalent) est très dangereuse. En particulier, elle n'est pas compatible avec la somme : $x \sim_{+\infty} x+1$, $\quad -x \sim_{+\infty} -x$ mais $0 \not\sim_{+\infty} 1$.
3. La seule raison de préférer la relation $\sim_{x_0}$ aux autres est qu'il s'agit d'une relation d'équivalence sur les fonctions définies et ne s'annulant pas sur un voisinage W de x_0.
4. Heureusement, on n'en a pas vraiment besoin : $\boxed{f(x) \sim_{x_0} g(x) \iff f(x) = g(x) + o_{x_0}(g(x)).}$
5. Comme une fonction qui admet une limite en un point est bornée sur un voisinage de ce point, $f(x) \sim_{x_0} g(x)$ ou $f(x) = o_{x_0}(g(x))$ implique $f(x) = O_{x_0}(g(x))$.

Exemple(s) 144 :

144.1 Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Alors $x^\alpha \sim_{+\infty} x^\beta$ si et seulement si $\alpha = \beta$. De plus, $x^\alpha = o_{+\infty}(x^\beta)$ si et seulement si $\alpha < \beta$.

144.2 Pour tous réels strictement positifs a et b, on rappelle que :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{a\times x}}{x^b} = +\infty \quad (1), \qquad \lim_{x\to-\infty} |x|^b \times \mathrm{e}^{a\times x} = 0 \quad (2), \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln(x))^b}{x^a} = 0 \quad (3), \qquad \lim_{x\to 0^+} x^a \times |\ln(x)|^b = 0 \quad (4).$$

Ce qui se traduit, avec les notations de Landau :

(a) $x^b = o_{+\infty}(e^{a\times x})$, (b) $e^{a\times x} = o_{-\infty}(x^{-b})$, (c) $(\ln(x))^b = o_{+\infty}(x^a)$, (d) $(\ln(x))^b = o_{0^+}(x^{-a})$.

144.3 $x^2 \times \sin\left(\frac{1}{x}\right) = O_0(x^2)$ mais également $x^2 \times \sin\left(\frac{1}{x}\right) = o_0(x)$.

144.4 $f(x) = o_{x_0}(1)$ signifie : $f(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} 0$. $f(x) = 0_{x_0}(1)$ signifie : « f est bornée qu voisinage de 1 ».

Propriété(s) 10.1.61 : Les notations petit et grand O ont les propriétés suivantes :

1. somme et différence :

   (a) $f_1 = O_a(\varphi)$ et $f_2 = O_a(\varphi) \Longrightarrow f_1 \pm f_2 = O_a(\varphi)$ (b) $f_1 = o_a(\varphi)$ et $f_2 = o_a(\varphi) \Longrightarrow f_1 \pm f_2 = o_a(\varphi)$

2. produits :

   (a) $f_1 = O_a(\varphi_1)$ et $f_2 = O_a(\varphi_2) \Rightarrow f_1\, f_2 = O_a(\varphi_1\, \varphi_2)$ (c) $f_1 = O_a(\varphi_1)$ et $f_2 = o_a(\varphi_2) \Longrightarrow f_1\, f_2 = o_a(\varphi_1\, \varphi_2)$
   (b) $f_1 = o_a(\varphi_1)$ et $f_2 = O_a(\varphi_2) \Longrightarrow f_1\, f_2 = o_a(\varphi_1\, \varphi_2)$ (d) $f_1 = o_a(\varphi_1)$ et $f_2 = o_a(\varphi_2) \Longrightarrow f_1\, f_2 = o_a(\varphi_1\, \varphi_2)$

3. transitivité :

   (a) $f = O_a(\varphi_1)$ et $\varphi_1 = O_a(\varphi_2) \Longrightarrow f = O_a(\varphi_2)$ (c) $f = O_a(\varphi_1)$ et $\varphi_1 = o_a(\varphi_2) \Longrightarrow f = o_a(\varphi_2)$
   (b) $f = o_a(\varphi_1)$ et $\varphi_1 = O_a(\varphi_2) \Longrightarrow f = o_a(\varphi_2)$ (d) $f = o_a(\varphi_1)$ et $\varphi_1 = o_a(\varphi_2) \Longrightarrow f = o_a(\varphi_2)$

Remarque(s) 94 : Malheureusement, on ne peut rien dire pour les quotients en général, l'inverse d'une fonction bornée n'a aucune raison d'être bornée par exemple. Il faut cependant savoir « simplifier » :

$$\boxed{\frac{o_{x_0}(f(x)\times g(x))}{f(x)} = o_{x_0}(g(x)) \quad \frac{O_{x_0}(f(x)\times g(x))}{f(x)} = O_{x_0}(g(x)).}$$

10.2 Continuité

10.2.1 Définition et premières propriétés

Définition 10.2.58 : *Soit $f : I \to \mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). On dit que f est continue en $a \in I$ si*

$$f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} f(a)$$

et on dit que f est continue sur I si f est continue en tout point de I.

Remarque(s) 95 : Parfois, on parlera de continuité à droite et à gauche en un point ce qui correspond à des limites limites à droite et à gauche.

Exemple(s) 145 :

145.1 Les fonctions polynomiales, exp, ln, cos, sin sont continues sur leur domaine de définition. Montrons par exemple que le fonction exponentielle l'est :

Démonstration :

(a) *Continuité en* 0 : Par l'inégalité géométrique, on a :

$$\forall x < 0, \quad x \leqslant e^x - 1 \leqslant 0$$

donc par le théorème des gendarmes, $e^x \underset{x\to 0^-}{\to} 1$. De plus,

$$\forall x \in]0,1], \quad 1 - e^{-x} \leqslant e^x - 1 = e^x\,(1 - e^{-x}) \leqslant e \times (1 - e^{-x})$$

donc par le cas précédent, et par le théorème des gendarmes ; $e^x \underset{x\to 0^+}{\to} 1$. Comme $e^0 = 1$, la fonction exponentielle est donc continue en 0.

(b) *Continuité en $a \in \mathbb{R}$* : par la continuité en 0 et les théorèmes généraux sur les limites, on a :

$$e^x - e^a = e^a \times (e^{x-a} - 1) \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0$$

■

145.2 La fonction partie entière est continue sur tout intervalle du type $]m, , +1[$ ($m \in \mathbb{Z}$) mais elle n'est continue sur aucun intervalle contenant un entier relatif.

Les propriétés suivantes sont des conséquences immédiates de celles sur les limites :

Propriété(s) 10.2.62 : Soit f et g deux fonctions définies sur I. Soit $a \in I$. On suppose f et g continues en a (resp. sur I). Alors :

1. $f + g$ est continue en a
2. $f \times g$ est continue en a (resp. sur I)
3. si $g(a) \neq 0$ alors f/g est continue en a (resp. si g ne s'annule pas sur I, f/g est continue sur I).
4. si h est définie sur un intervalle contenant $f(a)$ et continue en $f(a)$ (resp. continue sur un intervalle contenant $f(I)$) alors $h \circ f$ est continue en a (resp. $h \circ f$ est continue sur I).

Exemple(s) 146 :

146.1 La fonction tan est donc continue sur tout intervalle de son ensemble de définition.

146.2 Les fonctions puissances sont donc continues sur leurs ensembles de définition.

Définition 10.2.59 : *Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle $I = [a, b[$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On suppose que f* ***converge*** *en b^-. On appelle prolongement par continuité de f en b le fonction $\widetilde{f}$ définie sur $[a, b]$ par :*

$$\widetilde{f} : \ x \longmapsto \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad x \in I \\ \lim\limits_{x \to b^-} f(x) & \text{si} \quad x = b. \end{cases}$$

Remarque(s) 96 :

1. Évidemment, par définition, la fonction $\widetilde{f}$ est continue sur $[a, b]$
2. Il n'est pas possible de prolonger f en une extrémité en une fonction continue si f n'y admet pas de limite.
3. Souvent, par abus, on notera encore f la fonction prolongée en a.
4. Il est possible de prolonger de la même façon les fonctions continues sur u intervalle $]a, b]$ et admettant une limite finie en a^+ ou encore une fonction en un point « intérieur » à un intervalle I à condition dans ce cas de s'assurer que les limites à droite et à gauche en ce point sont les mêmes.

Exemple(s) 147 :

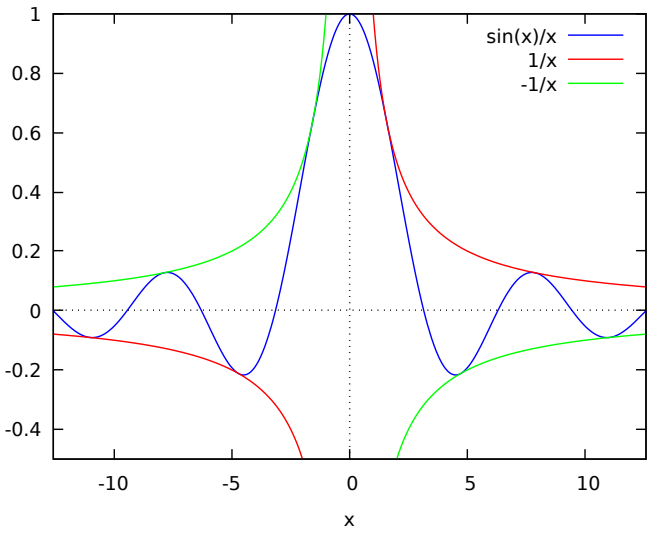
147.1 On a déjà utilisé un prolongement en continuité en 0 pour les fonctions puissance $x \mapsto x^\alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}_+$, à laquelle on a donné pour valeur 0 en 0.

147.2 La fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ (donc sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$) par $f(x) = x \times \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ se prolonge par continuité en 0 (à gauche et à droite) en posant $f(0) = 0$.

147.3 La fonction sinus cardinal, définie sur $\mathbb{R}^*$ par

$$g(x) = \frac{\sin(x)}{x}$$

se prolonge par continuité en 0 en posant $g(0) = 1$.



10.2.2 Continuité sur un intervalle

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On rappelle que l'ensemble des fonctions continues sur I est noté $\mathcal{C}(I,\mathbb{R}) = \mathcal{C}^0(I,\mathbb{R}) = \mathcal{C}(I)$.

Théorème 10.2.30 (des valeurs intermédiaires v1) : *Soit $f \in \mathcal{C}(I,\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe a et b deux éléments de I, $a \leqslant b$ et $f(a) \times f(b) \leqslant 0$. Alors*

$$\exists c \in [a,b], \quad f(c) = 0$$

Démonstration : Nous allons procéder par dichotomie. Pour ceci, on construit deux suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ et $(b_n)_{n\geqslant 0}$ de la façon suivante :

1. On pose $a_0 = a$, $b_0 = b$
2. si a_n et b_n existent, on pose :
   (a) si $f(a_n) \times f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right) \leqslant 0$, on pose $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$,
   (b) sinon, on pose $a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$ et $b_{n+1} = b_n$.

On remarque alors que, par définition, $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est croissante et $(b_n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante, que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}, \quad \text{et} \quad f(a_n) \times f(b_n) \leqslant 0$$

les trois premiers points nous assurent que les deux suites sont adjacentes, donc convergent vers une même limite l par le théorème des suites adjacentes. Quand à la dernière inégalité, comme f est continue en l, un passage à la limite nous assure que : $f(l)^2 \leqslant 0$ donc que $f(l) = 0$.

■

Exemple(s) 148 :

148.1 Montrons que l'équation : $x^{20} - x^{19} = 4$ admet au moins deux solutions. Pour ceci, posons $f(x) = x^{20} - x^{19} - 4$. Alors $f(0) = -4 < 0$ et f admet pour limite $+\infty$ en $\pm\infty$ donc est strictement positive sur un voisinage de $\pm\infty$. Donc comme f est continue sur $\mathbb{R}$, par le théorème des valeurs intermédiaires, f s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}_-^*$ et une fois sur $\mathbb{R}_+^*$.

148.2 Soit P une application polynomiale de degré impair, c'est-à-dire qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ et $a_0, a_1, \cdots, a_{2\,n+1}$ des réels tels que $a_{2\,n+1} \neq 0$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = \sum_{k=0}^{2\,n+1} a_k \times x^k$$

alors $P(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \pm\infty$ où $\pm$ est le signe de $a_{2\,n+1}$ et $P(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \mp\infty$ où le signe qui apparaît est celui de $-a_{2\,n+1}$ donc par le théorème des valeurs intermédiaires, la fonction continue sur $\mathbb{R}$ P s'annule en un point de $\mathbb{R}$:

$$\exists c \in \mathbb{R}, \quad P(c) = 0.$$

148.3 Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ une application continue. Alors f admet un **point fixe**. En effet, le fonction définie sur $[0,1]$ par $g(x) = f(x) - x$ est continue et vérifie $g(0) = f(0) \geqslant 0$ et $g(1) = f(1) - 1 \leqslant 0$, elle s'annule donc, c'est-à-dire :

$$\exists c \in [0,1], \quad f(c) = c.$$

Théorème 10.2.31 (des valeurs intermédiaires v2) : *Soit $f \in \mathcal{C}(I,\mathbb{R})$. Alors $f(I)$ est un intervalle, c'est-à-dire si a et b sont deux éléments de I et c un réel tel que $f(a) \leqslant c \leqslant f(b)$ alors*

$$\exists d \in I, f(d) = c.$$

Démonstration : Il suffit de considérer la fonction définie sur I par $g(x) = f(x) - c$ et d'y appliquer le théorème précédent.

■

Exemple(s) 149 :

149.1 Soit I un intervalle, et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrons que f est injective si et seulement si f est strictement monotone.

Démonstration : On a déjà vu que si f est strictement monotone, alors elle est injective. Montrons la réciproque par contraposée. Si f n'est pas strictement monotone alors il existe $a < b < c$ trois éléments de I tels que $f(a) < f(b)$ et $f(b) > f(c)$ (ou l'inverse). Mais alors, par le théorème des valeurs intermédiaires, tout élément de $[\min(f(a), f(c)), f(b)]$ admet au moins deux antécédents, ce qui contredit l'injectivité de f !

■

Théorème 10.2.32 (continuité de la fonction réciproque) : *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to J$ une application bijective et continue. Alors $f^{-1} : J \to I$ est une application continue.*

Remarque(s) 97 : Commençons par récapituler ce que l'on sait déjà :

1. Comme on vient de le voir, par le théorème des valeurs intermédiaires, comme I est un intervalle, f est strictement monotone.
2. Toujours par le théorème des valeurs intermédiaires, $J = f(I)$ est un intervalle.
3. En général, l'application réciproque d'une fonction monotone est strictement monotone, de même monotonie :
   Démonstration : Faisons la preuve dans le cas où f est croissante. On a :
   $$\forall (a,b) \in I^2, \quad a \leqslant b \Longrightarrow f(a) \leqslant f(b)$$
   donc, en prenant, pour $(\alpha, \beta) \in f(I)^2$, $a = f^{-1}(\alpha)$ et $b = f^{-1}(\beta)$, par contraposée :
   $$\alpha = f(f^{-1}(\alpha)) > f(f^{-1}(\beta)) = \beta \Longrightarrow f^{-1}(\alpha) > f^{-1}(\beta)$$
   l'application f^{-1} est donc strictement croissante.

   ■
4. Toute fonction monotone définie que un intervalle y admet une limite à gauche et à droite en tout point (lorsque ces limites ont un sens).

Démonstration : Faisons la preuve dans le cas où f est croissante et pour un point γ à « l'intérieur » de l'intervalle J (sinon, il suffit de faire la « moitié » du travail). Par le théorème de la limite monotone, f^{-1} admet une limite à droite et à gauche en tout γ appartenant à l'intervalle J. De plus, si $y < \gamma < y'$ sont trois éléments de J (on utilise ici que γ est à l'intérieur de J),

$$f^{-1}(y) \leqslant \lim_{y \to \gamma^-} f^{-1} \leqslant f^{-1}(\gamma) \leqslant \lim_{y \to \gamma^+} f^{-1} \leqslant f^{-1}(y')$$

On en déduit, en appliquant f qui est croissante à ces inégalités :

$$y \leqslant f(\lim_{y \to \gamma^-} f^{-1}) \leqslant \gamma \leqslant f(\lim_{y \to \gamma^+} f^{-1}) \leqslant y'.$$

En faisant tendre y et y vers γ, ce qui est possible car J est un intervalle, on en déduit :

$$f(\lim_{y \to \gamma^-} f^{-1}) = \gamma = f(\lim_{y \to \gamma^+} f^{-1}),$$

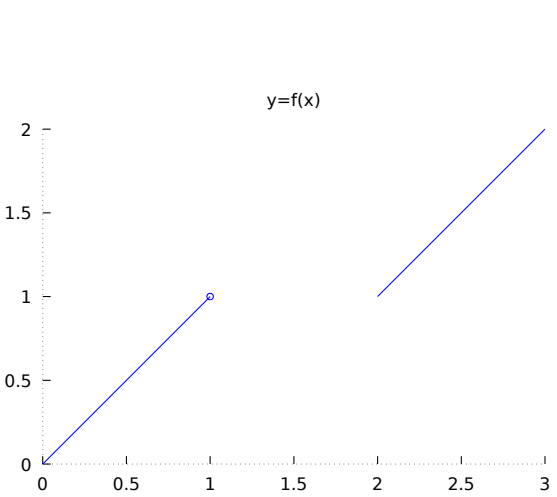
puis, en appliquant f^{-1} à cette égalité, $\lim_{y \to \gamma^-} f^{-1} = f^{-1}(\gamma) = \lim_{y \to \gamma^+} f^{-1}$. La fonction f^{-1} est donc continue.

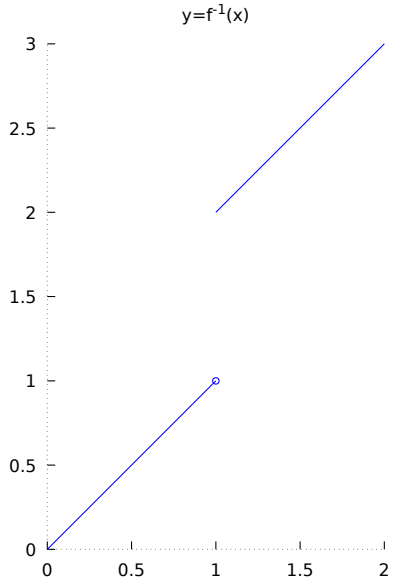
■

Exemple(s) 150 :

150.1 Les fonctions trigonométriques réciproques sont donc continues sur leur ensemble de définition.

150.2 Attention cependant ! Si I n'est pas un intervalle, le théorème ne se généralise pas. Par exemple, si l'on considère la fonction « définie » par le graphe suivant, elle est bijective et continue sur son intervalle de définition, mais son application réciproque n'est pas continue en 1 :





Remarque(s) 98 : 1. Si f est continue sur un intervalle I, $f(I)$ est donc un intervalle. Mais rien ne dit à priori qu'il contienne ses bornes ni qu'elle admette un maximum ou un minimum :

(a) si $f(x) = x$, alors $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$,

(b) si $f(x) = \arctan(x)$, alors $f(\mathbb{R}) = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$,

(c) si $f(x) = \frac{1}{x}$, alors $f(]0,1]) = [1, +\infty[$.

Théorème 10.2.33 (des bornes) : *Soit $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$. On suppose que I est un segment $[a,b]$. Alors f est bornée sur $[a,b]$ et elle y atteint ses bornes :*

$$\exists (u,v) \in [a,b]^2, \quad f([a,b]) = [f(u), f(v)].$$

Démonstration : Commençons par remarquer que par la théorème des valeurs intermédiaires, $f([a,b])$ est un intervalle. Notons β sa borne supérieure. Alors, il existe $(y_n)_{n\geqslant 0}$ une suite d'éléments de $f([a,b])$ telle que $y_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \beta$. Mais comme ce sont des éléments de $f([a,b])$,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists x_n \in [a,b], \quad f(x_n) = y_n.$$

La suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ est bornée, donc par le théorème de Bolzano-Weierstrass, elle admet une suite extraite convergente, notons-la $(x_{\varphi(n)})_{n\geqslant 0}$, qui tend vers une limite u, appartenant à $[a,b]$ par passage à la limite dans les inégalités. Alors, comme f est continue en u,

$$y_{\varphi(n)} = f(x_{\varphi(n)}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(u)$$

mais $(y_{\varphi(n)})_{n\geqslant 0}$ est une suite extraite de $(y_n)_{n\geqslant 0}$ donc elle tend aussi vers β. Ainsi, $\beta = f(u)$ et l'on procède de même pour la borne inférieure.

■

Remarque(s) 99 : Ce théorème en contient deux : le fonction f est bornée (ce qui est souvent le plus utile dans les exercices théoriques) et la fonction f atteint ses bornes (ce qui est utile lorsqu'on recherche un maximum ou un minimum d'une fonction).

Exemple(s) 151 :

151.1 Montrons qu'une fonction continue et périodique sur $\mathbb{R}$ est bornée. En effet, par lé théorème des bornes, f est bornée sur $[0,P]$, où P est sa période et comme elle est périodique, $f(\mathbb{R}) = f([0,P])$.

151.2 Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une application continue et surjective. Montrons que f s'annule une infinité de fois.
Comme f est surjective, il existe $a \in \mathbb{R}_+$ tel que $f(a_0) = 0$. Par le caractère borné des fonctions continues sur un segment, on a alors que $f([0, a_0]) = [i, s]$ est un segment. Comme f est surjective, il existe alors b_0 et c_0 tels que $f(b_0) = i - 1$ et $f(c_0) = s + 1$. Par définition de i et s, $b_0 > a_0$ et $c_0 > a_0$. Le théorème des valeurs intermédiaires nous assure alors l'existence d'un $a_1 > a_0$ tel que $f(a_1) = 0$. On itère alors l'opération, ce qui nous donne pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$a_0 < a_1 < \cdots < a_n, \ f(a_0) = f(a_1) = \cdots = f(a_n) = 0.$$

La fonction f s'annule donc une infinité de fois.

10.3 Dérivabilité

10.3.1 Définition et premières propriétés

Dans la suite, I est un intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide. Rappelons que :

Définition 10.3.60 : *Soit $f : I \to \mathbb{R}$. Soit $x_0 \in I$. On dit que f est dérivable en x_0 si :*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existe. On la note alors $f'(x_0)$. On dit que f est dérivable sur I si elle est dérivable en tout $x_0 \in I$.

Remarque(s) 100 : On peut également prendre des limites à droite ou à gauche. on parle dans ce cas de dérivée à droite ou à gauche.

Exemple(s) 152 :

152.1 Les fonctions polynomiales, exp, ln, cos, sin sont dérivables sur leur domaine de définition (de dérivées que vous connaissez).

152.2 La fonction valeur absolue n'est pas dérivable en 0 : en effet, son taux d'accroissement admet des limites différentes à gauche et à droite en 0. Elle y admet cependant des dérivées à droite et à gauche.

152.3 La fonction

$$f(x) = \begin{cases} x \times \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 \quad \text{sinon.} \end{cases}$$

n'est pas dérivable car, si $x \neq 0$:

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

n'admet pas de limite en 0.

152.4 La fonction :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \times \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0 \quad \text{sinon} \end{cases}$$

est dérivable en 0, de dérivée $f'(0) = 0$. En effet, si $x \neq 0$:

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = x \times \sin(x) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$$

par le théorème des gendarmes.

Propriété(s) 10.3.63 : Soit $f : I \to \mathbb{R}$, $x_0 \in I$. Alors f est dérivable en x_0 de dérivée $\delta = f'(x_0)$ si et seulement si :

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0) \times h + o_0(h).$$

Démonstration : Il s'agit essentiellement de poser $h = x - x_0$, puis de procéder par double implication. ■

Remarque(s) 101 : 1. En particulier, si f est dérivable en x_0, elle est continue en x_0.

2. La fonction partie entière n'est donc dérivable en aucun point entier relatif car elle n'y est pas continue.
3. Attention cependant, il est possible qu'une fonction soit continue en un point mais qu'elle n'y soit pas dérivable, comme le montre la fonction valeur absolue ou

$$f(x) = \begin{cases} x \times \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 \quad \text{sinon.} \end{cases} .$$

Nous allons maintenant démontrer les propriétés algébriques de la dérivation, c'est-à-dire :

Propriété(s) 10.3.64 : Soit f et g deux fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$, dérivables sur I et $k \in \mathbb{R}$, alors

1. $f+g$ est dérivable sur I et $(f+g)' = f' + g'$.
2. $k.f$ est dérivable sur I et $(k.f)' = k.f'$.
3. $f \times g$ est dérivable sur I et $(f \times g)' = f' \times g + f \times g'$.
4. Si g ne s'annule pas sur I alors f/g est dérivable sur I et :

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \times g - g' \times f}{g^2}$$

5. Si $u : J \supset f(I) \to \mathbb{R}$, est dérivable sur J, alors $u \circ f$ est dérivable sur I et $(u \circ f)' = (u' \circ f) \times f'$.
6. Si $f : I \to J$ est bijective et dérivable, et pour $x \in I$, $f'(x) \neq 0$ alors f^{-1} est dérivable en $y = f(x) \in J$ et :

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$$

Démonstration : Dans toute la preuve, nous omettrons le 0 en indice des « petit et grands o ». Soit $x_0 \in I$. Alors, comme f et g sont dérivables sur I, on a :

$$f(x_0+h) = f(x_0) + h \times f'(x_0) + o(h), \quad g(x_0+h) = g(x_0) + h \times g'(x_0) + o(h)$$

1. On en déduit :

$$f(x_0+h) + g(x_0+h) = f(x_0) + g(x_0) + h \times (f'(x_0) + g'(x_0)) + \underbrace{o(h) + o(h)}_{=o(h)}$$

donc $f+g$ est dérivable en x_0, de dérivée $f'(x_0) + g'(x_0)$

2. c'est un cas particulier de 3,
3. On a :

$$f(x_0+h) \times g(x_0+h) = (f(x_0) + h \times f'(x_0) + o(h)) \times (g(x_0) + h \times g'(x_0) + o(h))$$
$$= f(x_0) \times g(x_0) + (f(x_0) \times g'(x_0) + f'(x_0) \times g(x_0)) \times h + \underbrace{O(h^2) + o(h) \times O(h) + O(h) \times o(h)}_{=o(h)}$$

donc $f+g$ est dérivable en x_0, de dérivée $f(x_0) \times g'(x_0) + f'(x_0) \times g(x_0)$.

4. On a déjà vu au moment des fonctions complexes que cette formule est une conséquence de la précédente.
5. Il s'agit ici de remarquer que u est dérivable en $f(x_0)$ donc que, pour k au voisinage de 0 :

$$u(f(x_0)+k) = u(f(x_0)) + u'(f(x_0)) \times k + o(k).$$

On en déduit :

$$u(f(x_0+h)) = u(f(x_0) + h \times f'(x_0) + o(h)) = u(f(x_0)) + u'(f(x_0)) \times (h \times f'(x_0) + o(h)) + o(O(h))$$

Donc $u(f(x_0+h)) = u(f(x_0)) + h \times u'(f(x_0)) \times f'(x_0) + o(h)$. Le fonction $u \circ f$ est dérivable en x_0, de dérivée $u'(f(x_0)) \times f'(x_0)$.

6. Soit $(y, y_0) \in J^2$, $y \neq y_0$. On pose $y_0 = f(x_0)$ et $y = f(x)$. On a :

$$\frac{f^{-1}(y_0) - f^{-1}(y)}{y_0 - y} = \frac{x_0 - x}{f(x_0) - f(x)}$$

mais comme $x = f^{-1}(y)$ et comme f est continue (car dérivable), bijective sur l'intervalle I, f^{-1} l'est aussi donc lorsque y tend vers y_0, $x = f^{-1}(y)$ tend vers $x_0 = f^{-1}(x_0)$ donc comme $f'(x_0) \neq 0$:

$$\frac{f^{-1}(y_0) - f^{-1}(y)}{y_0 - y} = \frac{x_0 - x}{f(x_0) - f(x)} \underset{y \to y_0}{\longrightarrow} \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f(^{-1}(y_0)))}.$$

■

10.3.2 Propriétés des fonctions dérivables

Définition 10.3.61 : *Soit $a \in I$. On dit que a est un :*

1. *maximum local pour f s'il existe un voisinage V de a tel que :*

$$\forall x \in V, \quad f(x) \leqslant f(a)$$

2. *minimum local pour f s'il existe un voisinage V de a tel que :*

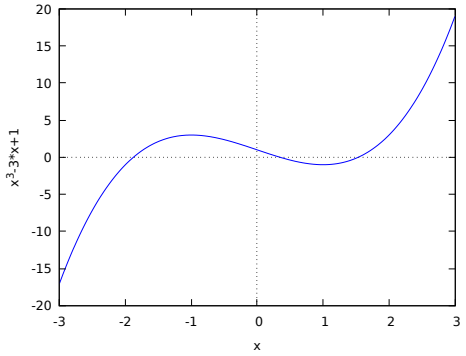
$$\forall x \in V, \quad f(x) \geqslant f(a)$$

3. *est un extremum local si c'est un minimum ou un maximum local.*

Exemple(s) 153 :

153.1 0 est un minimum local (et global) pour la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.

153.2 La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x + 1$ admet en -1 un maximum local mais pas global et en 1 un minimum local mais pas global :



Propriété(s) 10.3.65 : Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une application dérivable sur $]a, b[$. Si $c \in]a, b[$ est un extremum local de f, alors $f'(c) = 0$.

Démonstration : Supposons par exemple que c est un maximum local. Alors, il existe un voisinage de c (qui contient des réels de I inférieurs et supérieurs à c comme $c \in]a, b[$) tel que : $\forall x \in V, \quad f(x) \leqslant f(c)$. On en déduit :

$$\forall x \in V \cap]-\infty, c[, \quad \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geqslant 0, \quad \text{et} \quad \forall x \in V \cap]c, +\infty[, \quad \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leqslant 0$$

en passant à la limite à gauche, puis à droite et en utilisant que le taux d'accroissement admet une limite en c, on en déduit $f'(c) \geqslant 0$ et $f'(c) \leqslant 0$ donc $f'(c) = 0$.

■

Remarque(s) 102 : 1. Attention, il est possible que la fonction f admette une dérivée nulle en un point mais que ce ne soit pas un extremum local, comme le montre l'exemple de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$.

2. Attention aussi aux bornes, qui ne sont pas « vues » par le théorème. La fonction $f : x \in [0,1] \mapsto x$ admet par exemple un maximum et un minimum aux bornes de l'intervalle, et sa dérivée ne s'y annule pas.
3. Ce théorème nous donne une façon de limiter le nombre de points à traiter lorsqu'on cherche un maximum ou un minimum d'une fonction.

Théorème 10.3.34 (Rolle) : *Soit $a < b$ deux réels. Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. On suppose que $f(a) = f(b)$. Alors :*

$$\exists c \in]a,b[, \quad f'(c) = 0$$

Démonstration : Par le théorème des bornes, la fonction f admet un maximum et un minimum sur $[a,b]$. Si ce sont les mêmes, la fonction est constante et sa dérivée est nulle sur tout l'intervalle. S'ils sont différents, comme $f(a) = f(b)$, au moins un des deux est à l'intérieur de l'intervalle. Par la propriété précédente, la fonction dérivée s'annule alors en ce point.

■

Remarque(s) 103 : N'oubliez pas que la fonction doit être continue sur $[a,b]$ (et non $]a,b[$), comme le montre la fonction définie par :

$$\forall x \in [0,1], \quad f(x) = x - \lfloor x \rfloor.$$

Elle est continue et dérivable sur $]0,1[$, de dérivée constamment égale à 1.

Exemple(s) 154 :

154.1 La dérivée d'une fonction périodique dérivable sur $\mathbb{R}$ s'annule au moins une fois par période.

154.2 On peut utiliser plusieurs fois successivement le théorème de Rolle. Par exemple si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est deux fois dérivable et vérifie, pour $c \in]a,b[$, $f(a) = f(c) = f(b)$ montrons que :

$$\exists d \in]a,b[, \quad f''(d) = 0.$$

Démonstration : On utilise le théorème de Rolle deux fois successivement :

(a) La fonction f est dérivable sur $[a,b]$ donc dérivable sur $]a,c[$, continue sur $[a,c]$ et dérivable sur $]c,b[$, continue sur $[c,b]$. De plus, $f(a) = f(c)$ et $f(c) = f(b)$ donc par le théorème de Rolle (appliqué deux fois) :

$$\exists x \in]a,c[, \quad f'(x) = 0, \quad \exists y \in]c,b[, \quad f'(y) = 0.$$

(b) La fonction f' est dérivable sur $[a,b]$ donc dérivable sur $]x,y[$ et continue sur $[x,y]$. de plus, $f'(x) = f'(y)$ donc par la théorème de Rolle :

$$\exists d \in]x,y[\subset]a,b[, \quad (f')'(d) = 0.$$

■

154.3 Parfois, on a besoin d'une fonction auxiliaire pour appliquer la théorème de Rolle. Pour la trouver, l'idée est de « remplacer le c » par une variable dans l'expression demandée, d'en chercher une primitive puis de choisir la constante pour que la fonction vérifie les hypothèses du théorème de Rolle. Par exemple, soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue sur $[0,1]$ et dérivable sur $]0,1[$. On suppose que $f(1) = 0$. Montrons que :

$$\exists c \in]0,1[, \quad c\,f'(c) + f(c) = 0.$$

Démonstration :

(a) *Au brouillon :* la méthode pour trouver une fonction auxiliaire donne $g(x) = x\,f(x) + C$ et la condition $f(1) = 0$ donne $C = 0$.

(b) *Sur la copie :* considérons la fonction définie sur $[0,1]$ par $g(x) = x\,f(x)$. Alors : g est continue sur $[0,1]$ et dérivable sur $]0,1[$ car f l'est et $g(0) = 0$ et $g(1) = f(1) = 0$ donc par la théorème de Rolle, $\exists c \in]0,1[,\ g'(c) = 0$ c'est-à-dire :

$$\exists c \in]0,1[, \quad c\,f'(c) + f(c) = 0.$$

■

Théorème 10.3.35 (égalité des accroissements finis) : *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $(a,b) \in I^2$, $a < b$. On suppose que f est continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$. Soit Alors :*

$$\exists c \in]a,b[, \quad f(b) - f(a) = f'(c) \times (b-a).$$

Démonstration : Considérons la fonction [2] définie par :

$$\forall x \in [a,b], \quad g(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \times (x-a).$$

Vérifions les hypothèses du théorème de Rolle :

1. g est continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ car f l'est,
2. $g(a) = f(a) = g(b)$.

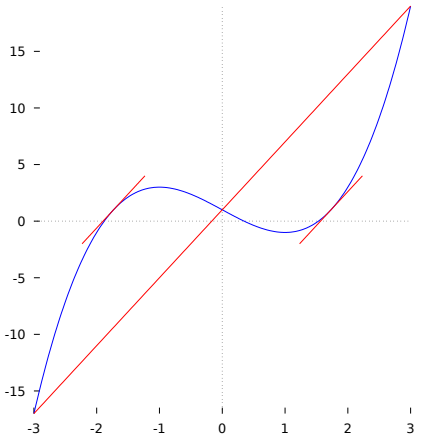
Donc par le théorème de Rolle,

$$\exists c \in]a,b[, \quad f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = g'(c) = 0$$

c'est-à-dire :

$$\exists c \in]a,b[, \quad f(b) - f(a) = f'(c) \times (b-a).$$

■



Exemple(s) 155 :

155.1 La première utilisation de ce résultat est qu'il justifie le lien entre dérivée et monotonie : soit I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$, continue sur I, dérivable sur $\overset{\circ}{I}$. On a :

$$\begin{aligned}
f' \geq 0 \text{ sur } \overset{\circ}{I} &\iff f \text{ croissante sur } I \\
f' \leq 0 \text{ sur } \overset{\circ}{I} &\iff f \text{ décroissante sur } I \\
f' = 0 \text{ sur } \overset{\circ}{I} &\iff f \text{ constante sur } I \\
f' > 0 \text{ sur } \overset{\circ}{I} &\implies f \text{ strictement croissante sur } I \\
f' < 0 \text{ sur } \overset{\circ}{I} &\implies f \text{ strictement décroissante sur } I
\end{aligned}$$

155.2 L'égalité des accroissements finis permet aussi de démontrer des inégalités : montrons par exemple que :

$$\forall x \geqslant 0, \quad \frac{x}{1+x^2} \leqslant \arctan(x) \leqslant x.$$

2. Que l'on peut trouver par la méthode de l'exemple précédent

En effet, l'inégalité est clairement vraie si $x = 0$ et si $x \neq 0$, en utilisant l'égalité des accroissements finis à la fonction continue sur $[0, x]$, dérivable sur $]0, x[$:

$$\exists c \in]0, x[, \quad \arctan(x) = \arctan(x) - \arctan(0) = \arctan'(c) \times (x - 0) = \frac{x}{1 + c^2}$$

et il reste à remarquer que, comme $c \in]0, x[$:

$$\frac{1}{1 + x^2} \leqslant \frac{1}{1 + c^2} \leqslant 1.$$

Définition 10.3.62 : *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application. Soit $k \in \mathbb{R}$. On dit que f est k-lipschitzienne sur I si :*

$$\forall (x, y) \in I^2, \quad |f(x) - f(y)| \leqslant k \times |x - y|.$$

Propriété(s) 10.3.66 : (Inégalité des accroissements finis) Soit f une fonction réelle continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$. On suppose que $|f'|$ est majorée par k sur $]a, b[$. Alors f est k-lipschitzienne sur $[a, b]$.

Démonstration : Soit $(x, y) \in I^2$. Alors, par l'égalité des accroissements finis :

$$\exists c \in I, \quad f(x) - f(y) = f'(c) \times (x - y)$$

on en déduit :

$$|f(x) - f(y)| = |f'(c)| \times |x - y| \leqslant k \times |x - y|.$$

■

Exemple(s) 156 :

156.1 Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $x, y \leqslant 2$. Alors :

$$|e^x - e^y| \leqslant e^2 \times |x - y|$$

il suffit de remarquer que, si $f(x) = e^x$, $|f'(x)| = e^x \leqslant e^2$ pour tout $x \leqslant 2$.

156.2 Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$|\arctan(x) - \arctan(y)| \leqslant |x - y|$$

car pour tout réel x, $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2} \leqslant 1$.

Théorème 10.3.36 (de prolongement de la dérivée) : *Soit f une fonction continue sur I, dérivable en tout point de $I \setminus \{a\}$. On suppose que f' admet pour limite l en a. Alors :*

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \underset{x \to a}{\longrightarrow} l$$

autrement dit, f est dérivable en a, de dérivée l.

Démonstration : Par le théorème des accroissements finis, que l'on peut appliquer car f est continue sur I et dérivable en tout point de $I \setminus \{a\}$ si $x \neq a$ est un élément de I,

$$\exists c_x \in]\min(x, a), \max(x, a)[\cap I, \quad \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(c_x)$$

notons en particulier que $|c_x - a| \leqslant |x - a|$. Donc c_x tend vers a lorsque x tend vers a. Comme f' tend vers l lorsque x tend vers a, par théorème de composition des limites, $f'(c_x)$ tend vers l lorsque x tend vers a. Donc :

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \underset{x \to a}{\longrightarrow} l.$$

■

Exemple(s) 157 :

157.1 La fonction $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \times \ln(x) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

est dérivable sur $\mathbb{R}_+$. En effet, elle est continue sur $\mathbb{R}_+$ par théorème de comparaison, elle est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et toujours par comparaison :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f'(x) = 2\,x \times \ln(x) + x \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} 0.$$

10.3.3 Fonctions de classe $\mathcal{C}^n$

Définition 10.3.63 : *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide. Soit n un entier naturel non nul. On dit que f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I si f y est n fois dérivable et que $f^{(k)}$, sa dérivée n-ième, est continue sur I. Si f est de classe $\mathcal{C}^n$ pour tout n, on dit qu'elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$.*

Exemple(s) 158 :

158.1 La fonction définie par :

$$g(x) = \begin{cases} x^2 \times \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée non continue en 0. En effet, par le théorème des gendarmes,

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = x \times \sin\left(\frac{1}{x}\right) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$$

et pour tout $x \neq 0$:

$$f'(x) = \underbrace{2\,x \times \sin\left(\frac{1}{x}\right)}_{\underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0} - \underbrace{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}_{\text{n'a pas de limite en 0}}$$

Il existe de même pour tout n non nul des fonctions n fois dérivables, de dérivée n-ième non continue. Formellement, pour en construire une, il suffit de « primitiver » $n-1$ fois l'exemple précédent.

158.2 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} x^n & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x \leqslant 0 \end{cases}$$

est par une récurrence immédiate de classe $\mathcal{C}^{(n-1)}$ sur $\mathbb{R}$, de dérivée $(n-1)$-ième

$$f^{(n-1)}(x) = \begin{cases} n! \times x & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x \leqslant 0 \end{cases}$$

mais elle n'est pas n fois dérivable : le taux d'accroissement de $f^{(n-1)}$ en 0 tend à droite vers $n!$ et à gauche vers 0.

Si l'on note $\mathcal{D}^n$ l'ensemble des fonctions dérivables sur I, on a donc les inclusions suivantes, dont chacune n'est pas une égalité :

$$\boxed{\mathcal{C}(I) \supsetneq \mathcal{D}(I) \supsetneq \mathcal{C}^1(I) \supsetneq \cdots \supsetneq \mathcal{D}^n(I) \supsetneq \mathcal{C}^n(I) \supsetneq \cdots \supsetneq \mathcal{C}^\infty(I).}$$

Propriété(s) 10.3.67 : Si f et g sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{R}$, si $k \in \mathbb{R}$ et si h est de classe $\mathcal{C}^n$ sur un intervalle $J \supset f(I)$, alors

1. $f + g$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I,
2. $k.f$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I,

3. $f \times g$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I,
4. si g ne s'annule pas sur I, $\frac{f}{g}$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I,
5. $h \circ f$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I,
6. si f est strictement monotone sur I et f' ne s'annule pas sur I alors f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I.

Démonstration : Il s'agit à chaque fois d'une récurrence bien posée. Montrons par exemple la propriété qui concerne la composition. Montrons par récurrence sur n que :

Pour toute fonctions f et h de classe $\mathcal{C}^n$ sur I (resp. $J \supset f(I)$) $h \circ f$ est de classe $\mathcal{C}^n$.

C'est vrai pour $n = 1$, c'est le résultat de dérivation et le fait que $f' \times h' \circ f$ est continue car f', h' et f le sont. Pour l'hérédité, on remarque que, si f et h sont de classe $\mathcal{C}^{N+1}$ alors :

$$(h \circ f)' = f' \times h' \circ f$$

est de classe $\mathcal{C}^N$ en utilisant l'hypothèse de récurrence pour les fonctions de classe $\mathcal{C}^N$ h' et f et le fait que le produit de fonctions de classe $\mathcal{C}^N$ est de classe $\mathcal{C}^N$.

■

Exemple(s) 159 :

159.1 La fonction exponentielle est infiniment dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée n-ième : $\exp^{(n)} = \exp$,

159.2 Les fonctions cos et sin sont infiniment dérivables sur $\mathbb{R}$, de dérivée n-ième :

$$\sin^{(n)}(x) = \begin{cases} \sin(x) & \text{si } n = 4k \\ \cos(x) & \text{si } n = 4k+1 \\ -\sin(x) & \text{si } n = 4k+2 \\ -\cos(x) & \text{si } n = 4k+3 \end{cases} \quad \text{et} \quad \cos^{(n)}(x) = \begin{cases} \cos(x) & \text{si } n = 4k \\ -\sin(x) & \text{si } n = 4k+1 \\ -\cos(x) & \text{si } n = 4k+2 \\ \sin(x) & \text{si } n = 4k+3 \end{cases}.$$

159.3 On en déduit que la fonction tangente, puis les fonctions logarithme et trigonométrique réciproque sont infiniment dérivables sur leur domaine de dérivabilité.

159.4 Les fonctions polynomiales sont infiniment dérivables sur $\mathbb{R}$: il suffit en effet par les théorèmes généraux de le montrer pour les fonctions monômes :

$$\forall k \in [\![0, n]\!], \quad (x^n)^{(k)} = \frac{n!}{(n-k)!} \times x^{n-k} \qquad \forall k \geqslant n+1, \quad (x^n)^{(k)} = 0.$$

Théorème 10.3.37 (formule de Leibniz) : *Soit f et g deux fonctions n fois dérivables sur I, alors*

$$(f\,g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}\, g^{(n-k)}.$$

Démonstration : Si $n = 0$, c'est clair. Traitons l'hérédité. Si la formule est vraie pour $n \in \mathbb{N}$ fixé, alors :

$$(f\,g)^{(n+1)} = \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}\, g^{(n-k)}\right)' = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (f^{(k+1)}\, g^{(n-k)} + f^{(k)}\, g^{(n-k+1)})$$

$$= f^{(n+1)}\, g^{(0)} + f^{(0)}\, g^{(n+1)} + \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right)}_{=\binom{n+1}{k} \text{ Pascal}} f^{(k)}\, g^{(n-k+1)} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(k)}\, g^{(n+1-k)}.$$

■

Remarque(s) 104 : Notez que l'on peut retrouver la formule du binôme de Newton à partir de cette formule en prenant $f(x) = \exp(a\,x)$ et $g(x) = \exp(b\,x)$.

Exemple(s) 160 :

160.1 Calculons la dérivée n-ième de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (x^2+1)\,\exp(2\,x)$$

par la formule de Leibniz, on a :

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (x^2+1)^{(k)}\,\exp(2\,x)^{(n-k)} = (4\,x^2+4\,x\,n+n^2-n+4)\,2^{n-2}\,\exp(2\,x).$$

10.3.4 Convexité

Définition 10.3.64 : *Soit f une fonction définie sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}$. On dit que f est convexe sur I si :*

$$\forall (a,b) \in I^2, \forall \lambda \in [0,1], \quad f((1-\lambda)\,a+\lambda\,b) \leqslant (1-\lambda)\,f(a)+\lambda\,f(b).$$

Remarque(s) 105 :

1. Si l'on remplace l'inégalité $\leqslant$ par $\geqslant$, la fonction f est dite **concave** que I.
2. Graphiquement, ceci signifie que f que tous les points du segment $[(a,f(a)),(b,f(b))]$ sont au-dessus du graphe de f.
3. Si l'on souhaite montrer qu'une fonction est convexe, les cas $a=b$, $\lambda=0$ et $\lambda=1$ de la définition sont toujours vrais. De plus, quitte à remplacer λ par $1-\lambda$, les rôles de a et b sont interchangeables. Il suffit donc de vérifier que pour $a<b$ et $\lambda \in]0,1[$ l'inégalité est vérifiée. Dans ce cas, il est alors souvent utile de noter :

$$c = (1-\lambda)\,a+\lambda\,b \iff \lambda = \frac{c-a}{b-a}$$

et avec cette notation, $\lambda \in]0,1[$ se traduit par $a<c<b$ et l'inégalité de la définition se ré-écrit :

$$f(c) \leqslant \frac{b-c}{b-a}\,f(a)+\frac{c-a}{b-a}\,f(b).$$

Propriété(s) 10.3.68 : (inégalité des pentes) Une fonction f définie sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}$ est convexe si et seulement si, pour tout $a<c<b$ trois points de I :

$$\frac{f(c)-f(a)}{c-a} \leqslant \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leqslant \frac{f(b)-f(c)}{b-c}.$$

Démonstration : Par la remarque précédente, montrer que f est convexe sur I revient à montrer que pour tous $a<c<b$ points de I :

$$f(c) \leqslant \frac{b-c}{b-a}\,f(a)+\frac{c-a}{b-a}\,f(b).$$

Mais cette inégalité équivaut à :

$$f(c)-f(a) \leqslant \frac{a-c}{b-a}\,f(a)+\frac{c-a}{b-a}\,f(b) \iff \frac{f(c)-f(a)}{c-a} \leqslant \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

ou encore à :

$$f(c)-f(b) \leqslant \frac{b-c}{b-a}\,f(a)+\frac{c-b}{b-a}\,f(b) \iff \frac{f(b)-f(c)}{b-c} \geqslant \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

■

Propriété(s) 10.3.69 : Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I. Alors :

$$f \text{ est convexe } \iff f' \text{ est croissante.}$$

Remarque(s) 106 : 1. Dans la démonstration de l'implication directe, on verra de plus que si f est convexe, le graphe de f est au-dessus de ses tangentes c'est-à-dire :

$$\boxed{\forall a \in I, \forall x \in I, \quad f(x) \geqslant f'(a)\,(x-a) + f(a).}$$

2. En particulier, si f est deux fois dérivable sur I :

$$\boxed{f \text{ est convexe sur } I \iff \forall x \in I, \quad f''(x) \geqslant 0.}$$

C'est presque toujours cette caractérisation que l'on utilisera pour montrer qu'une fonction est convexe.

Démonstration : Supposons f convexe sur I et soit $a \leqslant b$. Si $a = b$, $f'(a) = f'(c)$. Sinon, soit c tel que $a < c < b$. Alors, par l'inégalité des pentes :

$$\frac{f(c)-f(a)}{c-a} \leqslant \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leqslant \frac{f(c)-f(b)}{c-b}.$$

Mais alors, comme f est dérivable en a et en b, par passage à la limite dans la première inégalité puis dans la deuxième :

$$f'(a) \leqslant \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leqslant f'(b)$$

la fonction f' est donc croissante (et son graphe est toujours au-dessus de ses tangentes).
Réciproquement, si f' est croissante et $a < c < b$ sont trois points de I, comme f est dérivable sur I, par l'égalité des accroissements finis, il existe $d_1 \in]a, c[$, $d_2 \in]c, b[$ tels que :

$$f'(d_1) = \frac{f(c)-f(a)}{c-a} \quad \text{et} \quad f'(d_2) = \frac{f(b)-f(c)}{b-c}.$$

mais $d_1 < d_2$ donc comme f' est croissante :

$$\frac{f(c)-f(a)}{c-a} \leqslant \frac{f(b)-f(c)}{b-c} \iff f(c) \leqslant \frac{b-c}{b-a} f(a) + \frac{c-a}{b-a} f(b)$$

donc f est convexe sur I.

■

Exemple(s) 161 :

161.1 La fonction exponentielle est convexe car sa dérivée seconde est positive. Donc, pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$:

$$e^{\frac{a+b}{2}} \leqslant \frac{e^a + e^b}{2}.$$

161.2 Nous allons montrer que, pour tout $a, b > 1$:

$$\ln\left(\frac{a+b}{2}\right) \geqslant \sqrt{\ln a \, \ln b}.$$

(a) Le fonction $f(x) = \ln(\ln(x))$ est concave sur $]1, +\infty[$. En effet

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2 \ln(x)} - \frac{1}{x^2 \ln^2(x)} \leqslant 0.$$

Donc, si $a, b > 1$:

$$\ln\left(\ln\left(\frac{a+b}{2}\right)\right) \geqslant \frac{\ln(\ln(a)) + \ln(\ln(b))}{2} = \ln(\sqrt{\ln a \, \ln b})$$

l'inégalité recherchée s'obtient alors en appliquant la fonction exponentielle qui est croissante à l'égalité.

10.3.5 Extension aux fonctions complexes.

Nous avons déjà vu que les théorèmes généraux de dérivation s'étendent facilement aux fonctions de la variable réelle à valeurs complexes *via* la règle de calcul :

$$\boxed{\forall x \in I, \quad f'(x) = \mathrm{Re}(f)'(x) + \mathrm{Im}(f)'(x)\, i.}$$

Il faut cependant faire attention pour les théorèmes qui concernent les propriétés des fonctions dérivables. Par exemple, le théorème de Rolle est faux, comme le montre la fonction :

$$f : \theta \in [0, 2\pi] \mapsto e^{i\theta} \in \mathbb{C}$$

qui est continue sur $[0, 2\pi]$, dérivable sur $]0, 2\pi[$, vérifie $f(0) = f(2\pi) = 1$ mais :

$$\forall \theta \in]0, 2\pi[, \quad f'(\theta) = i\, e^{i\theta} \neq 0.$$

Cependant, certaines applications de ces théorèmes sont encore vraies, par exemple, en utilisant le résultat réel sur ses parties réelles et imaginaires si $f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable sur $\overset{\circ}{I}$:

$$\boxed{f' = 0 \text{ sur } \overset{\circ}{I} \iff f \text{ constante sur } I.}$$

De façon moins triviale :

Théorème 10.3.38 (inégalité des accroissements finis pour les fonctions complexes) : *Soit $a < b$ et $f : [a; b] \to \mathbb{C}$ une application continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$. On suppose qu'il existe une constante k telle que :*

$$\forall x \in]a, b[, \quad |f'(x)| \leqslant k.$$

Alors f est k-lipschitzienne :

$$\forall (x, y) \in [a, b], \quad |f(x) - f(y)| \leqslant k \times |x - y|.$$

Démonstration : Si $f(x) = f(y)$, il n'y a rien à faire. Sinon, soit θ un argument de $f(x) - f(y)$. Alors : $f(x) - f(y) = e^{i\theta} \times |f(x) - f(y)|$. Alors : si l'on pose :

$$g(t) = \mathrm{Re}(e^{-i\theta} \times f(t))$$

la fonction g est réelle, à valeurs réelles, et vérifie les hypothèses de l'inégalité des accroissements finis car la partie réelle d'une fonction complexe dérivable est par définition dérivable. De plus :

$$|g'(t)| = |\mathrm{Re}(e^{-i\theta} \times f'(t))| \leqslant |e^{-i\theta} \times f'(t)| = |f'(t)| \leqslant k$$

donc :

$$|f(x) - f(y)| = \mathrm{Re}(e^{-i\theta} \times (f(y) - f(x))) = g(y) - g(x) \leqslant k \times |x - y|.$$

■

10.4 Développements limités

10.4.1 Définition et premières propriétés

Dans tout le paragraphe, on notera simplement o pour o_0 et O pour O_0.

Définition 10.4.65 : *Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, soit $n \in \mathbb{N}$ et soit $x_0 \in I$, on dit que f admet* un développement limité à l'ordre n en x_0, *si, il existe des réels $(a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tels que :*

$$f(x_0 + h) = \sum_{k=0}^{n} a_k\, h^k + o(h^n) = a_0 + a_1\, h + \cdots + a_n\, h^n + o(h^n).$$

On peut aussi écrire :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k\, (x - x_0)^k + o_{x_0}\left((x - x_0)^n\right).$$

Propriété(s) 10.4.70 : Si f possède un développement limité à l'ordre n en x_0, alors celui-ci est unique.

Démonstration : Supposons connus deux développements distincts, on a alors :

$$f(x_0+h)=\sum_{k=0}^{n} a_k\,h^k+o(h^n)=\sum_{k=0}^{n} b_k\,h^k+o(h^n).$$

Comme les deux développements sont supposés distincts, on peut introduire :

$$p=\min\left\{k\in[\![0,n]\!],\ a_k\neq b_k\right\}.$$

On a alors, lorsque $h\neq 0$:

$$a_p-b_p=\sum_{k=p+1}^{n}(b_k-a_k)\,h^{k-p}+o(h^{n-p})\xrightarrow[h\to 0]{}0.$$

Donc ; $a_p=b_p$, ce qui est absurde par définition de p.

■

Remarque(s) 107 :

1. On en déduit que, si f, définie sur un voisinage I de 0, admet un développement limité en 0 à l'ordre n et que de plus :
   (a) f est *paire* alors, les coefficients impairs du développement limité seront nuls ;
   (b) f est *impaire* alors, les coefficients pairs du développement limité seront nuls.
2. f admet un développement limité à l'ordre 0 en x_0 si, et seulement si, f est continue en x_0.
3. f admet un développement limité à l'ordre 1 en x_0 si, et seulement si, f est dérivable en x_0.
4. En revanche, l'existence d'un développement limité d'ordre $n\geq 2$ au voisinage de x_0 ne garantit rien de plus que la dérivabilité en x_0 ! En effet, la fonction définie par :

$$f(x)=\begin{cases}x^{n+1}\sin\left(\frac{1}{x^n}\right), & \text{si } x\neq 0\\ 0, & \text{sinon,}\end{cases}$$

admet un développement limité à l'ordre n en 0 est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ mais n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$ en 0.

Exemple(s) 162 :

162.1 Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a :

$$(1-x)\sum_{k=0}^{n}x^k=1-x^{n+1}$$

on en déduit immédiatement le développement limité à l'ordre n en 0 :

$$\boxed{\frac{1}{1-x}=\sum_{k=0}^{n}x^k+o(x^n)}$$

162.2 De ce développement limité, on déduit :

$$\boxed{\frac{1}{1+x}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\,x^k+o(x^n)}$$

10.4.2 Théorèmes d'existence

Théorème 10.4.39 (primitivation de développements limités) : *Supposons que f admette en x_0 un développement limité à l'ordre n :*

$$f(x_0+h)=\sum_{k=0}^{n}a_k\times h^k+o\left(h^n\right).$$

Soit F une primitive de f. Alors F admet un développement limité à l'ordre $n+1$ en x_0 :

$$F(x_0+h)=F(x_0)+\sum_{k=0}^{n}\frac{a_k}{k+1}\times h^{k+1}+o\left(h^{n+1}\right).$$

Démonstration : On pose :

$$G(h) = F(x_0 + h) - F(x_0) - \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1} \times h^{k+1}$$

alors par définition, G est dérivable, $G(0) = 0$ et

$$G'(h) = f(x_0 + h) - \sum_{k=0}^{n} a_k \times h^k = o(h^n).$$

Mais, par l'égalité des accroissements finis, si $h \neq 0$,

$$\exists c_h \in]\min(0,h), \max(0,h)[, \quad G(h) = G(h) - G(0) = G'(c_h) \times h$$

Mais par définition, $c_h = O(h)$ donc $G'(c_h) = o((O(h))^n) = o(O(h^n)) = o(h^n)$ et l'on en déduit : $G(h) = o(h^{n+1})$ ce qui est exactement le résultat attendu.

■

Exemple(s) 163 :

163.1 Ce théorème nous donne le développement limité à l'ordre n en 0 :

$$\boxed{\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \times x^k + o(x^n)}$$

163.2 Ainsi que, comme :

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} (-1)^k \times x^{2\,k} + o(x^{n-1})$$

$$\boxed{\arctan(x) = \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \frac{(-1)^k}{2\,k+1} \times x^{2\,k+1} + o(x^n)}$$

Théorème 10.4.40 (Taylor-Young) : *Soit f une fonction n fois dérivable ($n \in \mathbb{N}$) sur un intervalle I et soit $x_0 \in I$, alors*

$$f(x_0 + h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \times h^k + o(h^n),$$

ou, encore :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \times (x - x_0)^k + o_{x_0}((x - x_0)^n).$$

Démonstration : Procédons par récurrence sur n. Si $n = 0$, il s'agit d'une caractérisation de la continuité en 0. Soit maintenant $n \in \mathbb{N}$ fixé et f une fonction f $n+1$ fois dérivable sur un intervalle I contenant x_0. Posons :

$$G(h) = f(x_0 + h) - \sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \times h^k$$

alors la fonction G est dérivable sur I et vérifie :

$$G'(h) = f'(x_0 + h) - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{(k-1)!} \times h^{k-1} = f'(x_0 + h) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(f')^{(k)}(x_0)}{k!} \times h^k.$$

donc par l'hypothèse de récurrence appliquée à la fonction f', qui est n fois dérivable : $G'(h) = o(h^n)$. Par le théorème de primitivation des développements limités, on en déduit :

$$f(x_0 + h) - \sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \times h^k = G(h) = G(0) + o(h^{n+1}) = o(h^{n+1})$$

ce qui achève de montrer l'hérédité.

■

Remarque(s) 108 : 1. Attention ! Contrairement au théorème précédent, pour que celui-ci soit vrai, il est nécessaire que la fonction f soit n fois dérivable.

2. À condition que la fonction f soit n fois dérivable, il est donc possible de dériver un développement limité à l'ordre n. Mais c'est un résultat non trivial (il utilise ce théorème) et faux sans l'hypothèse que f est n fois dérivable.

De ce théorème, on déduit les développements limités classiques :

Exemple(s) 164 :

164.1 La fonction exponentielle a un développement limité à l'ordre n en 0 (les autres s'en déduisent à l'aide de la relation $e^{x_0+h} = e^{x_0} \times e^h$) :

$$\boxed{e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n).}$$

164.2 De même pour les fonctions sinus et cosinus, au voisinage de 0 :

$$\boxed{\sin(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} (-1)^k \times \frac{x^{2\,k+1}}{(2\,k+1)!} + o(x^n),}$$

et

$$\boxed{\cos(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^k \times \frac{x^{2\,k}}{(2\,k)!} + o(x^n).}$$

164.3 Profitons pour donner ceux, plus faciles, des fonctions ch et sh :

$$\boxed{\mathrm{sh}(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \frac{x^{2\,k+1}}{(2\,k+1)!} + o(x^n),}$$

et

$$\boxed{\mathrm{ch}(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{x^{2\,k}}{(2\,k)!} + o(x^n).}$$

164.4 Enfin, au voisinage de 0, pour $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha \times \cdots \times (\alpha - k + 1)}{k!} \times x^k + o(x^n).}$$

164.5 Cherchons enfin un développement limité à l'ordre 5 de la fonction tangente en 0. Comme elle est impaire et $\tan'(0) = 1$, il existe des réels a, b tels que

$$\tan(x) = x + a \times x^3 + b \times x^5 + o(x^5)$$

mais tangente est 5 fois dérivable donc $\tan'$ admet pour développement limité en 0 :

$$\tan'(x) = 1 + 3\,a \times x^2 + 5\,b \times x^4 + o(x^4)$$

Enfin, $\tan' = 1 + \tan^2$ donc :

$$1 + 3\,a \times x^2 + 5\,b \times x^4 + o(x^4) = 1 + (x + a \times x^3 + b \times x^5 + o(x^5))^2 = 1 + x^2 + 2\,a\,x^4 + o(x^4)$$

et l'on en déduit par unicité du développement limité : $a = \frac{1}{3}$ et $b = \frac{2}{15}$. Donc :

$$\boxed{\tan(x) = x + \frac{1}{3}\,x^3 + \frac{2}{15}\,x^5 + o(x^5).}$$

10.4.3 Calculs pratiques

La formule de Taylor est souvent la pire méthode pour calculer un développement limité. Elle réclame le calcul de dérivées, ce qui est un calculs particulièrement laborieux. Le plus simple est presque toujours de procéder « par opérations ». Voyons comment faire sur des exemples :

1. Les combinaisons linéaires de développements limités sont particulièrement faciles à faire :

Exemple(s) 165 :

165.1
$$\sin^2(x) = \frac{1}{2}(1-\cos(2x)) = \frac{1}{2}(1-\cos(2x)) = \frac{1}{2}\left(2x^2 - \frac{2}{3}x^4 + o(x^5)\right) = x^2 - \frac{1}{3}x^4 + o(x^5).$$

165.2
$$\cos(x) - \sqrt{1-x^2} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{8}x^4 + o(x^5) = \frac{x^4}{6} + o(x^5)$$

165.3
$$\sin(a+h) = \sin(a)\times\cos(h) + \cos(a)\times\sin(h)$$
$$= \sin(a)\times\left(1 - \frac{h^2}{2} + o(h^3)\right) + \cos(a)\times\left(h - \frac{h^3}{6} + o(h^3)\right) = \sin(a) + \cos(a)\times h - \frac{\sin(a)}{2}\times h^2 - \frac{\cos(a)}{6}\times h^3 + o(h^3).$$

2. Pour le produit, pour s'éviter des calculs inutiles, il est important de connaître la **forme normalisée** d'un développement limité :

$$\boxed{f(a+h) = h^p \times \left(a_0 + a_1 \times h + \cdots + a_{n-p} \times h^{n-p}\right) + o(h^n), \quad a_0 \neq 0}$$

Il est utile de calculer l'entier naturel p (qu'on appellera valuation du développement limité) avant de se lancer dans un produit. En effet, pour calculer le développement limité à l'ordre n du produit $f \times g$, où f et g ont pour forme normalisée :

$$f(a+h) = h^p \times (a_0 + a_1 \times h + \cdots), \quad g(a+h) = h^q \times (b_0 + b_1 \times h + \cdots)$$

il suffit de calculer celui de f à l'ordre $n-q$ et celui de g à l'ordre $n-p$.

Exemple(s) 166 :

166.1 sin a pour valuation 1 en 0, il suffit donc pour calculer un développement limité à l'ordre 5 en 0 de $\sin^2$ de calculer celui de sin à l'ordre $5-1=4$:

$$\sin^2(x) = \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)^2 = x^2 \times \left(1 - \frac{x^2}{6} + o(x^3)\right)^2 = x^2 \times \left(1 - \frac{x^2}{3} + o(x^3)\right) = x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^5).$$

166.2 Calculons un développement limité à l'ordre 8 en 0 de :

$$(\mathrm{ch}(x) - \cos(x)) \times (\mathrm{sh}(x) - \sin(x))$$

Pour ceci, on remarque que le premier membre du produit a pour valuation 2 et le second membre du produit 3. Il suffit donc d'écrire le premier membre à l'ordre $8-3=5$ et le second à l'ordre $8-2=6$:

$$\mathrm{ch}(x) - \cos(x) = x^2 + o(x^5) \quad \mathrm{sh}(x) - \sin(x) = \frac{x^3}{3} + o(x^6)$$

on en déduit :

$$(\mathrm{ch}(x) - \cos(x)) \times (\mathrm{sh}(x) - \sin(x)) = x^5 \times \left(1 + o(x^3)\right) \times \left(\frac{1}{3} + o(x^3)\right) = \frac{x^5}{3} + o(x^8).$$

166.3 Calculons un développement limité à l'ordre 5 en 0 du produit :

$$(\tan(x) - x) \times (\cos(x) - 1)$$

le premier membre du produit a pour valuation 3 et le second pour valuation 2, il suffit donc d'écrire les développements limités :

$$\tan(x) - x = \frac{x^3}{3} + o(x^3) \quad \text{et} \quad \cos(x) - 1 = -\frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

on en déduit :

$$(\tan(x) - x) \times (\cos(x) - 1) = \left(\frac{x^3}{3} + o(x^3)\right) \times \left(-\frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) = -\frac{x^5}{6} + o(x^5).$$

3. Pour calculer un développement limité à l'ordre n du quotient f/g, où f et g ont pour forme normalisée :

$$f(a+h) = h^p \times (a_0 + a_1 \times h + \cdots), \quad g(a+h) = h^q \times (b_0 + b_1 \times h + \cdots)$$

il s'agit d'écrire :

$$\frac{f(a+h)}{g(a+h)} = \frac{h^{p-q}}{b_0} \times \underbrace{\frac{a_0 + a_1 \times h + \cdots}{1 - \frac{-b_1}{b_0} \times h + \cdots}}_{(\star)}$$

puis, en utilisant le développement limité de $1/(1-x)$, d'écrire un développement limité du quotient $(\star)$ à l'ordre $n-(p-q)$. Il s'agit donc d'écrire un développement limité de f à l'ordre $n-(p-q)+p = n+q$ et un développement limité de g à l'ordre $n-(p-q)+q = n-p+2\,q$.

Exemple(s) 167 :

167.1 Calculons un développement limité à l'ordre 4 en 0 du quotient :

$$\frac{\mathrm{sh}(x) - \sin(x)}{\mathrm{ch}(x) - \cos(x)}$$

pour ceci, il s'agit de calculer un développement limité à l'ordre $4+2=6$ du numérateur et un développement limité à l'ordre $4+4-3=5$ du dénominateur :

$$\frac{\mathrm{sh}(x) - \sin(x)}{\mathrm{ch}(x) - \cos(x)} = \frac{\frac{x^3}{3} + o(x^6)}{x^2 + o(x^5)} = x \times \frac{\frac{1}{3} + o(x^3)}{1 + o(x^3)} = x \times \left(\frac{1}{3} + o(x^3)\right) \times \left(1 + o(x^3)\right) = \frac{x}{3} + o(x^4).$$

167.2 Calculons un développement limité à l'ordre 3 en 0 de la fonction

$$\frac{\sin^2(x)}{\mathrm{sh}^2(x)}$$

pour ceci, on remarque que le numérateur et le dénominateur ont pour valuation 2, il s'agit donc de calculer un développement limité à l'ordre $3+2=5$ du numérateur et un développement limité à l'ordre $3-2+4=5$ du dénominateur. On a :

$$\sin^2(x) = x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^5) \quad \text{et} \quad \mathrm{sh}^2(x) = x^2 + \frac{x^4}{3} + o(x^5)$$

Donc :

$$\frac{\sin^2(x)}{\mathrm{sh}^2(x)} = \frac{1 - \frac{x^2}{3} + o(x^3)}{1 + \frac{x^2}{3} + o(x^3)} = \left(1 - \frac{x^2}{3} + o(x^3)\right) \times \left(1 - \frac{x^2}{3} + o(x^3)\right) = 1 - \frac{2}{3}\,x^2 + o(x^3)$$

167.3 Calculons d'une autre façon (moins efficace...) un développement limité à l'ordre 5 en 0 de la fonction tangente :

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

la fonction sinus a pour valuation 1 en 0 et la fonction cosinus a pour valuation 0 en 0. Il s'agit alors d'écrire un développement limité de sin à l'ordre $5+0=5$ et un développement limité de cos à l'ordre $5-1+2\times 0=4$:

$$\tan(x) = \frac{x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)}{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)} = \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)\right) \times \left(1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4!} + \frac{x^4}{4} + o(x^4)\right)$$

$$= x + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right) x^3 + \left(-\frac{1}{4!} + \frac{1}{4} - \frac{1}{12} + \frac{1}{5!}\right) x^5 + o(x^5)$$

et l'on retrouve :

$$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}\,x^5 + o(x^5).$$

4. Enfin, on peut composer des développements limités. Il y a un seul grand piège à éviter lorsqu'on effectue un tel calcul pour calculer le développement limité de $f\circ g$ à l'aide de ceux de f et g en a, il faut que $\boxed{g(a)=0}$. Concernant la prédiction des ordres, il faut remarquer que, si q est la valuation du développement limité de de $f(g(x))-f(a)$ en $g(a)$ et p celle de g en a (retenez que, contrairement à notre habitude, on écrit le développement limité de f avec un dernier terme en O) :

$$f(g(a+h))=a_0+\underbrace{a_q\times h^{p\times q}\times(b_0+b_1\times h+\cdots)^q}_{(1)}+\cdots+\underbrace{h^{\alpha\times p}\times(b_0+b_1\times h+\cdots)^\alpha+\underbrace{O\left(h^{(\alpha+1)\times p}\right)}_{=o(h^{(\alpha+1)\times p-1})}}_{(2)}$$

   (a) Par (1), il suffit d'écrire le développement limité de g à l'ordre $n-(p\times q)+p$,
   (b) par (2), il suffit décrire celui de f à l'ordre $\lfloor\frac{n}{p}\rfloor$.

Exemple(s) 168 :

168.1 Calculons un développement limité à l'ordre 3 en 0 de :

$$\frac{1}{1-\arctan(x)}$$

On vérifie immédiatement que $\arctan(x)=0$. Dans ce cas, $p=1$ et $q=1$ donc il s'agit de composer les développements limités :

$$\arctan(x)=x-\frac{x^3}{3}+o(x^3)\quad\text{et}\quad\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+O(x^4)$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-\arctan(x)}&=1+\left(x-\frac{x^3}{3}+o(x^3)\right)+\left(x-\frac{x^3}{3}+o(x^3)\right)^2+\left(x-\frac{x^3}{3}+o(x^3)\right)^3+O(O(x)^4)\\&=1+x+x^2+\left(-\frac{1}{3}+1\right),x^3+o(x^3)=1+x+x^2+\frac{2}{3}x^3+o(x^3)\end{aligned}$$

168.2 N'oublier pas de vérifier que $g(a)=0$! Par exemple, calculons un développement limité en 0 à l'ordre 3 de :

$$\frac{1}{1+\cos(x)}$$

on aurait envie de procéder comme précédemment, mais $\cos(0)=1\neq 0$! Heureusement, on peut écrire :

$$\frac{1}{1+\cos(x)}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{1-\frac{1-\cos(x)}{2}}.$$

Dans ce cas, $q=1$ et $p=2$ donc il suffit de composer les développements limités :

$$\frac{1-\cos(x)}{2}=\frac{x^2}{4}+o(x^3),\quad\frac{1}{1-x}=1+x+O(x^2)$$

on en déduit :

$$\frac{1}{1+\cos(x)}=\frac{1}{2}\times\left(1+\frac{x^2}{4}+o(x^3)+O(O(x^2)^2)\right)=\frac{1}{2}+\frac{x^2}{8}+o(x^3)$$

168.3 Terminons par un grand classique. Cherchons un développement limité à l'ordre 2 en 0 de

$$(1+x)^{\frac{1}{x}}$$

encore une fois, cette expression nécessite une réécriture :

$$(1+x)^{\frac{1}{x}}=\exp\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right)$$

l'écriture du développement limité $\ln(1+x)=x+\ldots$ nous montre que le quotient qui apparaît ne tend pas vers 0... il faut donc encore réécrire :

$$(1+x)^{\frac{1}{x}}=e\times\exp\left(\frac{\ln(1+x)}{x}-1\right)$$

Nous sommes maintenant dans les conditions d'utilisation de la composition de développements limités : ici, $p = 1$ et $q = 1$, il s'agit donc de composer les développements limités :

$$\frac{\ln(1+x)}{x} - 1 = -\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2), \quad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + O(x^3)$$

donc :

$$\begin{aligned}(1+x)^{\frac{1}{x}} &= e \times \left(1 + \left(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2)\right) + \frac{1}{2}\left(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2)\right)^2 + O(O(x)^3)\right) \\ &= e \times \left(1 - \frac{x}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{8}\right)x^2 + o(x^2)\right) = e - \frac{e}{2}x + \frac{11\,e}{24}x^2 + o(x^2).\end{aligned}$$

10.4.4 Applications des développements limités

Il existe au moins quatre applications des développements limités :

1. *le calcul de limites* : rappelons que f admet une limite en a si et seulement si elle y admet un développement limité d'ordre 0. Il suffit donc de calculer un tel développement limité pour calculer une limite. Par exemple :

$$(1+x)^{\frac{1}{x}} = e + o(1) \quad \text{donc} \quad (1+x)^{\frac{1}{x}} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} e.$$

2. *la dérivabilité* : un développement limité à l'ordre un implique une dérivabilité. Par exemple :

$$(1+x)^{\frac{1}{x}} = e - \frac{e}{2}x + o(x)$$

donc si l'on prolonge par continuité cette fonction par la valeur e en 0, elle y est dérivable, de dérivée $-e/2$.

3. *le calcul d'équivalents* : vous verrez parfois dans un énoncé une question du type : « déterminez un équivalent simple en a de la fonction f ». Une façon de répondre est de remarquer que, si f admet en a la forme normalisée :

$$f(a+h) = h^p \times \left(a_0 + a_1 \times h + \cdots + a_{n-p} \times h^{n-p}\right) + o(h^n), \quad a_0 \quad \text{alors} \quad \boxed{f(x) \sim_a a_0 \times h^p}.$$

Par exemple, on a :

$$\sin(x) - \tan(x) = -\frac{x^3}{2} + o(x^3) \sim_0 -\frac{x^3}{2} \quad \text{et} \quad \sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} = x + o(x) \sim_0 x$$

Dans tous les autres cas, il s'agit de se ramener à un calcul de développement limité. Par exemple :

$$\ln(1+x) - \ln(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{x}\right) \sim_{+\infty} \frac{1}{x}.$$

4. *Extremum locaux*

Propriété(s) 10.4.71 : Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable sur $]a,b[$. Soit $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$. Alors :

(a) Si f admet en c un maximum local, $f''(c) \geqslant 0$.

(b) Si $f''(c) > 0$, f admet en c un maximum local f.

Remarque(s) 109 : (a) La même propriété reste valable dans le cas d'un minimum local en « inversant » les signes.

(b) si $f''(c) = 0$, tout reste possible, comme le montrent les fonctions $x^3, x^4, -x^4$.

Démonstration : Comme f est deux fois dérivable en c et $f'(c) = 0$, on peut écrire par la formule de Taylor-Young :

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h^2} = f''(c) + o(1)$$

mais alors :

(a) si f admet en c un maximum local, cette quantité est positive au voisinage de c donc par passage à la limite dans les inégalités, $f''(c) \geqslant 0$,

(b) si $f''(c) > 0$, alors par la définition de la limite, $\frac{f(c+h)-f(c)}{h^2}$ est positif sur un voisinage de c donc f admet en c un maximum local.

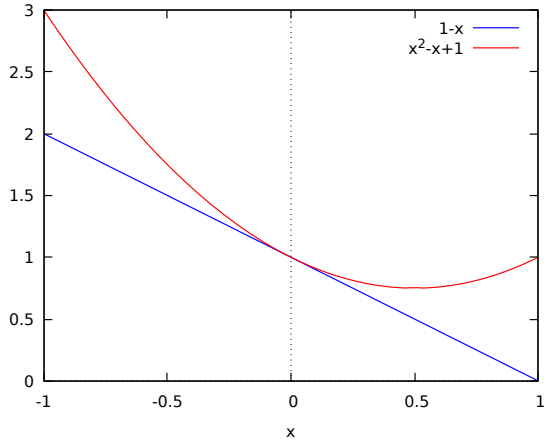
■

5. *position locale par rapport à la tangente* : un développement limité peut servir à positionner localement la courbe par rapport à la tangente. En effet, si f vérifie, pour $p \geqslant 2$ $a_p \neq 0$ et :

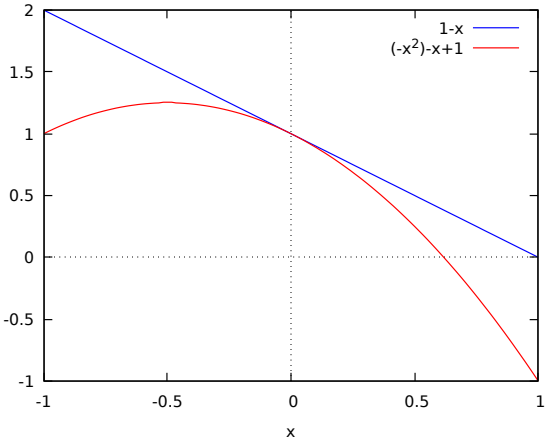
$$f(x) = f(a) + f'(a) \times (x-a) + a_p \times (x-a)^p + o((x-a)^p)$$

il y a trois cas :

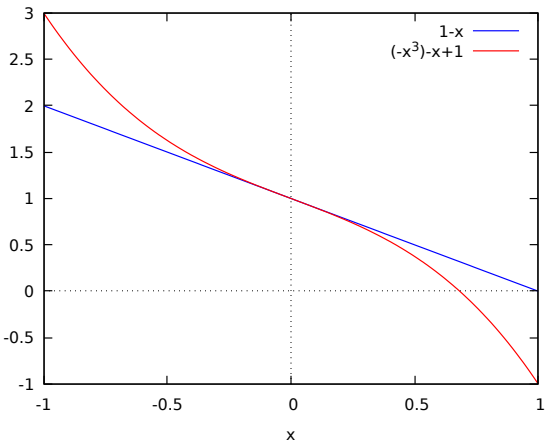
(a) p est pair et $a_p > 0$, la fonction est au-dessus de sa tangente en a au voisinage de a :



(b) p est pair et $a_p < 0$, la fonction est en-dessous de sa tangente an a au voisinage de a :



(c) p est impair, dans ce cas, f traverse en a sa tangente (on parle de point d'inflexion)



Chapitre 11

Dénombrement

11.1 Techniques de dénombrement.

11.1.1 Raisonnements par disjonction des cas

Pour compter des éléments d'un ensemble, E on peut procéder par **disjonction des cas.** Attention cependant

1. les cas considérés doivent **s'exclure mutuellement**
2. les cas considérés doivent être **exhaustifs** (on doit toujours être dans l'un des cas considérés).

Dans ce cas, le nombre d'éléments de E est la **somme** des nombres d'éléments considérés dans chacun des cas.

11.1.2 Arbres des possibilités

On peut recommencer un raisonnement par disjonction des cas en en refaisant un pour une partie des sous-cas. Pour présenter les résultats, on utilise alors un **arbre des possibilités.** Un exemple essentiel est le suivant : on considère une urne U composée de n boules. On peut effectuer un tirage de p boules dans cette urne de façon :

	Simultanément	Successivement
Avec remise	Tirage simultané	Tirage successif, avec remise
Sans remise		Tirage successif, sans remise

Pour les tirages successifs, on peut représenter les tirages possibles sous la forme d'un arbre de possibilités. On a :

1. Il y a $n \times n \times \cdots \times n = n^p$ tirages successifs avec remise différents
   Démonstration : Pour chacun des tirages, il y a n possibilités. ■
2. Il y a si $p \geqslant n$: $n \times (n-1) \times \cdots \times (n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$ p tirages successifs sans remise et aucun si $p > n$.
   Démonstration : Si $p > n$, le résultat est clair. Si $p \leqslant n$, pour le premier tirage, on a n possibilités, puis pour le deuxième $n-1$ et ainsi de suite jusqu'au dernier pour lequel on a $n-p+1$ possibilités. ■

Pour simplifier les notations, on notera ce dernier entier naturel A_n^p. Plus précisément :

$$\boxed{A_n^p = \begin{cases} \frac{n!}{(n-p)!} & \text{si } p \geqslant n \\ 0 & \text{si } p > n \end{cases}.}$$

Remarque(s) 110 : Un cas particulier est celui pour lequel on tire n boules successivement sans remise dans une urne à n éléments. On appelle un tel tirage une **permutation** et elle correspond à choisir un ordre sur les éléments de l'urne. Par ce qu'on a déjà vu, il y a $\boxed{n!}$ permutations d'une urne avec n boules.

Exemple(s) 169 :

169.1 On considère le mot MATH et on appelle anagramme de ce mot tout mot constitué de ses lettres. Il y a autant d'anagrammes de ce mot que de permutations de ses quatre lettres différentes, donc $4! = 24$.

Propriété(s) 11.1.72 : Pour tout $p \in \mathbb{N}$, il y a $\binom{n}{p}$ tirages simultanés de p éléments parmi les n éléments de l'urne.

Démonstration : Clairement, le résultat est vrai pour $p > n$. Si $p \leqslant n$, il y a A_n^p tirages successifs sans remise de p boules dans l'urne. Mais deux de ces tirages donnent les mêmes p éléments si on peut permuter les éléments de l'un pour obtenir les éléments de l'autre. Autrement dit, chaque tirage simultané de p boules apparaît $p!$ fois parmi les tirages successifs sans remise de p boules. Il y a donc :

$$\frac{1}{p!} A_n^p = \frac{n!}{(n-p)! \times p!} = \binom{n}{p}$$

tels tirages.

■

Récapitulons ces propriétés :

Nom du tirage	Successif avec remise	Successif sans remise	Simultané
Nombre de tirages	n^p	A_n^p	$\binom{n}{p}$

Exemple(s) 170 :

170.1 Un problème de dénombrement se ramène souvent à un problème d'urne. Par exemple, dans un jeu de 52 cartes, que l'on peut imaginer comme une urne contenant 52 boules piocher deux cartes correspond à tirer 2 boules l'urne. Donc :

(a) Il y a $\binom{52}{2} = \frac{52 \times 51}{2} = 1326$ mains différentes.

(b) Il y a A_{52}^{52} façons de permuter ces cartes, c'est-à-dire 52! mélanges différents.

(c) Pour tirer une paire, on peut :

i. tirer n'importe quelle des 52 cartes en premier puis tirer l'une des 3 cartes de même hauteur dans les cartes restantes du jeu. Chaque paire a ainsi été comptée deux fois. Il y a donc : $(52 \times 3)/2 = 78$ mains constituées de paires.

ii. mais on peut considérer d'autres « urnes » : tirer une hauteur parmi les 13 puis compter le nombre de mains à deux cartes que l'on peut faire avec les cartes de cette hauteur. Il y a donc $13 \times \binom{4}{2} = 13 \times 6 = 78$ mains constituées de paires.

(d) Pour tirer deux cartes de même couleur, on peut :

i. tirer n'importe quelle des 52 cartes en premier puis tirer l'une des 12 cartes de même couleur dans les cartes restantes du jeu. Chaque main a alors été comptée deux fois. Il y a donc : $(52 \times 12)/2 = 312$ mains constituées de cartes de même couleur.

ii. tirer une couleur parmi les 4 couleurs du jeu puis parmi les 13 cartes de cette couleur tirer 2 cartes. Il y a donc $4 \times \binom{13}{2} = 4 \times 6 \times 13 = 312$ telles mains.

(e) Pour tirer deux cartes de hauteur successives, on peut :

i. tirer une première carte parmi les 52 puis tirer l'une des 8 cartes de hauteur suivante ou antérieure. Chaque main a ainsi été comptée deux fois. Il y a donc $52 \times 8/2 = 208$ telles mains.

ii. tirer la hauteur de la plus petite carte parmi les 13 hauteurs ce qui nous donne la hauteur des deux cartes puis « colorier » en tirant successivement avec remise une des 4 couleurs pour chaque carte. Il y a donc $13 \times 4^2 = 208$ telles mains.

170.2 On peut retrouver des résultats sur les coefficients binomiaux grâce à des tirages. Par exemple, pour tirer p boules dans une urne contenant $n \geqslant 1$ boules, on peut mettre de côté l'une des boules de l'urne. Alors les tirages peuvent :

(a) ne pas contenir cette boule donc être constitués de p boules parmi les $n-1$ restantes : $\binom{n-1}{p}$ possibilités

(b) contenir cette boule et donc être constitués de $p-1$ boules parmi les $n-1$ restantes : $\binom{n-1}{p-1}$ possibilités.

Notez que ces deux cas s'excluent mutuellement. On retrouve donc la formule de Pascal car par le premier point de la propriété :

$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1}.$$

170.3 Lorsqu'on cherche à développer le produit

$$(a+b+c)^3 = (a+b+c) \times (a+b+c) \times (a+b+c)$$

on peut voir le développement comme 3 tirages parmi les trois « boules » a, b et c et faire une raisonnement un cas par cas pour trouver le développement :

(a) a^3, b^3, c^3 : 1 fois

(b) $a^2 \times b$, (et de même $a^2 \times c$, $b^2 \times a$, $b^2 \times c$, $c^2 \times a$, $c^2 \times b$). On a choisi a deux fois parmi les trois et b une seule fois. Il y a 3 possibilités pour ce choix de b donc chacun de ces termes apparaît 3 fois

(c) $a \times b \times c$: chaque développement donnant ce terme apparaît d'une permutation de (a, b, c) donc ce terme apparaît $3! = 6$ fois en tout.

On en déduit :

$$(a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3\,(a^2 \times b + a^2 \times c + b^2 \times a + b^2 \times c + c^2 \times a + c^2 \times b) + 6\,a \times b \times c.$$

170.4 Ce type d'argument permet de retrouver rapidement la formule du binôme de Newton :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k \times b^{n-k}.$$

En effet, le terme $a^k \times b^{n-k}$ correspond à avoir choisi exactement k fois a parmi les n a apparaissant dans les termes du produit, ce qui donne exactement $\binom{n}{k}$ telles possibilités.

11.2 Application de ces techniques en théorie des ensembles

11.2.1 Cardinaux de certains ensembles

Définition 11.2.66 : *Soit A un ensemble fini. On note $|A|$, $\#A$ ou $\mathrm{Card}(A)$ le nombre d'éléments de A et on l'appelle cardinal de A.*

Exemple(s) 171 :

171.1 $\mathrm{Card}(\emptyset) = 0$

171.2 Si $A \subset E$ sont deux ensembles finis alors :

$$\boxed{\mathrm{Card}(A) \leqslant \mathrm{Card}(E).}$$

De plus, cette inégalité est une égalité si et seulement si $A = E$.

Propriété(s) 11.2.73 : Soit A et B deux sous-ensembles finis de E. Alors $A \cup B$ est fini et :

1. Si A et B sont disjoints, c.a.d. $A \cap B = \emptyset$: $\mathrm{Card}(A \cup B) = \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B)$.
2. Dans le cas général,
$$\mathrm{Card}(A \cup B) = \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B) - \mathrm{Card}(A \cap B).$$

Démonstration : Le premier cas est une traduction du raisonnement par disjonction des cas. Pour le second, on remarque que, par le premier cas :

$$\text{Card}(A) = \text{Card}(B \cap A) + \text{Card}(A \setminus B).$$

Donc, toujours par le premier point :

$$\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(B) + \text{Card}(A \setminus B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B).$$

■

Remarque(s) 111 : 1. En particulier, dans la preuve, on a vu que :

$$\text{Card}(A) = \text{Card}(B \cap A) + \text{Card}(A \setminus B).$$

2. Un cas particulier que l'on utilise souvent est celui pour lequel $\boxed{A \subset B}$. Dans ce cas :

$$\boxed{\text{Card}(A) = \text{Card}(B) - \text{Card}(A \setminus B).}$$

On peut également utiliser les tirages pour obtenir des résultats.
• Le cas le plus simple à exploiter est le tirage successif avec plusieurs « urnes »

Propriété(s) 11.2.74 : Soit E et F deux ensembles finis. Alors :

$$\text{Card}(E \times F) = \text{Card}(E) \times \text{Card}(F).$$

Démonstration : Il suffit de considérer que l'on tire successivement une boule dans « l'urne E » (Card(E) choix) puis dans « l'urne » F (Card(F) choix).

■

Remarque(s) 112 : Évidemment, ceci se généralise par une récurrence immédiate à n ensembles : si tous les ensembles E_i $(1 \leqslant i \leqslant k)$ sont finis, on a :

$$\text{Card}(E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_k) = \text{Card}(E_1) \times \text{Card}(E_2) \times \cdots \times \text{Card}(E_k).$$

• Pour les tirages simultanés, la traduction nécessite un peu de notations :

Définition 11.2.67 : *Soit E un ensemble. On appelle :*

1. *$\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des sous-ensembles de E et*
2. *pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}_p(E)$ l'ensemble des sous-ensembles à p éléments de E. (Un tel ensemble peut aussi être appelé p-combinaison d'éléments de E).*

Exemple(s) 172 :

172.1 (a) Si $E = \emptyset$, $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset\}$.
(b) si $E = \{a\}$, $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{a\}\}$
(c) si $E = \{a, b\}$, $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$

172.2 Soit $E = \{a, b, c\}$. On a : $\mathcal{P}_2(E) = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}$.

Propriété(s) 11.2.75 : Supposons que E a n éléments. Alors, pour tout $p \in \mathbb{N}$: Card$(\mathcal{P}_p(E)) = \binom{n}{p}$.

Démonstration : Une partie à p éléments de l'ensemble E correspond à un tirage simultané de p éléments dans « l'urne » E constituée de n « boules ». Il y en a donc $\binom{n}{p}$.

■

Exemple(s) 173 :

173.1 Soit E une ensemble à n éléments. Alors :

$$\boxed{\text{Card}(\mathcal{P}(E)) = 2^n.}$$

Démonstration : On raisonne par disjonction des cas, suivant le nombre d'éléments d'une partie de E. On a donc :

$$\text{Card}(\mathcal{P}(E)) = \sum_{k=0}^{n} \text{Card}(\mathcal{P}_k(E)) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$$

■

11.2.2 Cardinaux et fonctions

• Si $f_1, f_2, \ldots, f_p$ sont des éléments d'un ensemble F à n éléments, on appelle $(f_1, f_2, \ldots, f_p)$ une **p-liste** ou un **p-uplet**. Il y a autant de p-listes que de tirages successifs avec remise de p « boules » dans l'urne F de n boules, c'est-à-dire n^p. Si l'on considère deux ensembles finis E et F, se donner une fonction $f : E = \{e_1, e_2, \ldots, e_p\} \to F$ revient à se donner la valeur de $(f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_p))$ ou encore une p-liste de F.

$$\boxed{\text{Il y a donc } n^p \text{ applications de } E \text{ dans } F.}$$

• Pour les tirages successifs sans remise, il est intéressant de revenir à leur écriture mathématique : $(B_1, B_2, \cdots, B_p) \in U^p$ est un tirage successif sans remise si

$$\forall (i,j) \in [\![1,p]\!]^2, i \neq j, \quad B_i \neq B_j.$$

en d'autres termes, l'application

$$f : \begin{cases} [\![1,p]\!] & \longrightarrow U \\ i & \longmapsto B_i \end{cases}$$

est injective.

Propriété(s) 11.2.76 : Soit E un ensemble de cardinal p et F un ensemble de cardinal n. Il y a A_n^p applications injectives de E dans F.

Démonstration : Il suffit de numéroter les éléments de E. Via cette numérotation, une telle application injective correspond à une application injective $[\![1,p]\!] \to U$ donc à un tirage successif sans remise dans « l'urne » F, il y en a donc A_n^p.

■

Propriété(s) 11.2.77 : Soit E un ensemble fini et $f : E \to F$ une application. Alors si $\text{Card}(E) = \text{Card}(F)$, les trois points suivants sont équivalents :

1. f est injective,
2. f est surjective,
3. f est bijective.

Démonstration : Voyons f comme un tirage et posons $n = \text{Card}(E) = \text{Card}(F)$.

1. (1) ⇒ (2) : f est injective signifie que le tirage est sans remise ; on tire donc sans remise n fois un élément parmi les n éléments de F. On les a donc tous tirés ! Donc f est surjective.
2. (2) ⇒ (3) : f est surjective signifie qu'en n tirages toutes les n « boules » de F ont été tirées au moins une fois. On n'a donc pas pu tirer deux fois la même boule. Chaque boule a donc été tirée une unique fois. Donc f est bijective.
3. (3) ⇒ (1) : immédiat.

■

Chapitre 12

Probabilités

12.1 Espaces probabilisés

12.1.1 Vocabulaire probabiliste

Les probabilités servent à modéliser les expériences aléatoires. Commençons par un peu de vocabulaire :

Ensembles	En probabilités	Sens pratique	Un jet de pièce	Un jet de dé 6
Ω	univers	toutes les issues possibles de l'expérience	$\{P, F\}$	$[\![1, 6]\!]$
$A \subset \Omega$	évènement	un ensemble d'issues possibles de l'expérience	$\{P, F\}$	$\{2, 4, 6\}$
$\{\omega\}$	évènement élémentaire	une seule issue de l'expérience	$\{P\}$ ou $\{F\}$	$\{6\}$
$\emptyset$	évènement impossible	une expérience a toujours une issue	aucune face	aucune valeur
Ω	évènement certain	Ω contient toutes les issues de l'expérience	$\{P, F\}$	$[\![1, 6]\!]$
$\bar{A} = \Omega \setminus A$	évènement contraire	le contraire de l'évènement A	$\overline{\{P\}} = \{F\}$	$\overline{\{6\}} = [\![1, 5]\!]$
$A \subset B$	A implique B	si l'issue est dans A alors elle est dans B	$\{P\} \subset \{P, F\}$	$\{1\} \subset \{1, 3, 5\}$
$A \cap B = \emptyset$	A et B incompatibles	les issues de A et B s'excluent mutuellement	$\{P\}$ et $\{F\}$	$\{1, 3\}$ et $\{2, 4\}$

Dans tout problème de probabilités, traduire les phrases de français en univers et évènements est la première étape ; il s'agit d'une modélisation. Voyons quelques exemples.

Exemple(s) 174 :

174.1 On jette simultanément deux dés de 6 et de 4 et on s'intéresse aux jets de produit impair :

$$\Omega = [\![1, 6]\!] \times [\![1, 4]\!], \quad A = \{(1, 1), (1, 3), (3, 1), (3, 3), (5, 1), (5, 3)\}.$$

174.2 On jette successivement deux dés de 10 et on se sert du premier pour le chiffre des dizaines, l'autre pour celui des unités. On s'intéresse aux jets qui sont supérieurs à 90 :

$$\Omega = [\![0, 99]\!], \quad A = [\![90, 99]\!].$$

174.3 On considère au temps t que met une particule radioactive à se désintégrer. On s'intéresse à celles qui se désintègrent en moins de 1 min.

$$\Omega = \mathbb{R}_+, \quad A = [0, 1].$$

12.1.2 Notion de probabilité

À partir de maintenant et jusqu'à la fin du chapitre, nous supposerons l'univers Ω fini et non vide.

Définition 12.1.68 : *Une probabilité sur un univers fini Ω est une application :*

$$\mathbb{P} : \begin{cases} \mathcal{P}(\Omega) & \longrightarrow [0, 1] \\ A & \longmapsto \mathbb{P}(A) \end{cases}$$

qui vérifie :

1. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$

2. *Pour tous évènements A et B incompatibles,* $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.

Le couple $(\Omega, \mathbb{P})$ est alors appelé espace probabilisé.

Exemple(s) 175 :

175.1 Par définition, on a alors : $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.

175.2 L'exemple le plus courant de probabilité est la la **probabilité uniforme** sur Ω :

$$\forall A \in \mathcal{P}(\Omega), \quad \mathbb{P}(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}.$$

Cette probabilité sert à modéliser les évènements « équiprobables », comme le jet d'une pièce ou d'un dé « non pipés ». Dans ce cas, un exercice de probabilité se ramène donc essentiellement à un exercice de dénombrement.

175.3 Il ne s'agit cependant pas de la seule probabilité. Par exemple, lorsqu'on jette une pièce « pipée » qui a une probabilité p de tomber sur « pile », il est naturel de considérer la probabilité sur $\Omega = \{P, F\}$ définie par :

$$\mathbb{P}(\Omega) = 1, \quad \mathbb{P}(\{P\}) = p, \quad \mathbb{P}(\{F\}) = 1 - p, \quad \mathbb{P}(\emptyset) = 0.$$

Propriété(s) 12.1.78 : Soit A_1, A_2,...,A_n des évènements deux à deux incompatibles d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$. Alors :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i).$$

Démonstration : On procède par récurrence sur n. Si $n = 1$, c'est immédiat. Si le résultat est vrai pour $n \in \mathbb{N}$ fixé, alors :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) + \mathbb{P}(A_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) + \mathbb{P}(A_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} \mathbb{P}(A_i).$$

■

Remarque(s) 113 : Pour définir une probabilité sur un univers fini Ω, il suffit donc de la définir sur les évènements élémentaires, en s'assurant que la somme des probabilités de tous les évènements fait bien 1. Une fois ceci fait, il suffit de poser, pour tout évènement A :

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega \in A} \mathbb{P}(\{\omega\}).$$

Exemple(s) 176 :

176.1 La probabilité qui modélise la somme du lancé de deux dés 6 est définie par :

Somme des dés	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Probabilité	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

La probabilité d'obtenir un lancé inférieur ou égal à 6 est donc de $15/36 \simeq 0,41$.

176.2 La probabilité qui modélise le produit du lancé de deux dés 4 est définie par :

Produit des dés	1	2	3	4	6	8	9	12	16
Probabilité	1/16	1/8	1/8	3/16	1/8	1/8	1/16	1/8	1/16

Il vaut donc beaucoup mieux jouer le 4 que le 9 !

Propriété(s) 12.1.79 : Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. On a, pour tous évènements A et B :

1. $A \subset B$ implique $\mathbb{P}(A) \leqslant \mathbb{P}(B)$ (la probabilité $\mathbb{P}$ est croissante),
2. $\mathbb{P}(A \setminus B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B)$; en particulier, $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$,

3. $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.

Démonstration :

1. On a $B = A \cup (B \setminus A)$ donc comme A et $B \setminus A$ sont incompatibles :
$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \setminus A) \geqslant \mathbb{P}(A).$$
2. Comme les évènements $A \cap B$ et $A \setminus B$ sont incompatibles :
$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}((A \cap B) \cup (A \setminus B)) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \setminus B).$$
3. Enfin, on peut écrire $A \cup B$ comme la réunion d'évènements incompatibles :
$$A \cup B = (A \setminus (A \cap B)) \cup (B \setminus (A \cap B)) \cup A \cap B,$$
donc :
$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A \setminus (A \cap B)) + \mathbb{P}(B \setminus (A \cap B)) + \mathbb{P}(A \cap B) \underbrace{=}_{2} \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B).$$

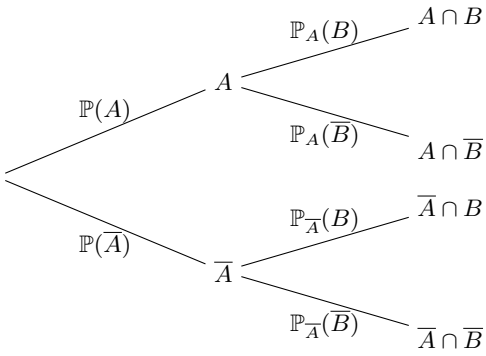
■

Remarque(s) 114 : Il est donc légitime en probabilités, comme en dénombrement de faire des raisonnements par disjonction des cas ou par passage à l'évènement contraire.

12.1.3 Probabilités conditionnelles

Définition 12.1.69 : *Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit A un évènement de Ω de probabilité non nulle. On appelle probabilité de B sachant A la quantité :*
$$\mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}.$$

Remarque(s) 115 :
1. Si la probabilité $\mathbb{P}$ est uniforme, cette probabilité désigne la proportion du nombre d'éléments de A à l'intérieur de B.
2. On utilise souvent la définition de la probabilité conditionnelle « à l'envers », on l'appelle alors **formule des probabilités composées** :
$$\boxed{\text{si } \mathbb{P}(A) > 0, \quad \mathbb{P}(A \cap B) = P(B|A) \times \mathbb{P}(A).}$$
3. Une façon agréable de se rappeler de la formule des probabilités composées est de faire un arbre de probabilités.



Bien entendu, cet arbre peut avoir plus de deux branches à chaque étape, il suffit d'avoir un « système complet d'évènements de probabilités non nulles » c'est-à-dire :

Définition 12.1.70 : *Une famille d'évènements $A_1, A_2, \dots, A_n$ est appelée système complet d'évènements de probabilités non nulles si :*

1. *Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$: $\mathbb{P}(A_i) \neq 0$,*
2. *les évènements de cette famille sont deux à deux incompatibles,*
3. $\Omega = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$.

Exemple(s) 177 :

177.1 On jette un dé à 6 face. La probabilité de l'évènement « on obtient un 6 » sachant que « on n'a pas obtenu un 1 » vaut : $\frac{\frac{1}{6}}{\frac{5}{6}} = \frac{1}{5}$.

177.2 On considère une famille de deux enfants. Alors :

(a) la probabilité que les deux enfants soient des filles sachant que l'aîné est une fille est : $\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$,

(b) la probabilité que les deux enfants soient des filles sachant qu'il y a au moins une fille est : $\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{3}$.

Propriété(s) 12.1.80 : (formule des probabilités totales) Supposons que $A_1, A_2, \dots, A_n$ soit un système complet d'évènements de probabilités non nulles. Alors pour tout évènement B :

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(B|A_k) \times \mathbb{P}(A_k).$$

Démonstration : Les évènements $B \cap A_i$ sont deux à deux incompatibles et : $B = \bigcup_{k=1}^{n} B \cap A_k$ donc par la formule des probabilités composées :

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(B \cap A_k) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(B|A_k) \times \mathbb{P}(A_k).$$

■

Remarque(s) 116 : Bien souvent, on utilisera cette formule en ne vérifiant pas le point « de probabilité non nulle ». Pour qu'elle reste valable dans ce cas, il faut admettre la convention, pour A un évènement de probabilité nulle :

$$\underbrace{\mathbb{P}(B|A)\times}_{\text{n'a pas de sens}} \quad \underbrace{\mathbb{P}(A)}_{\text{... mais vaut 0}} \quad = 0$$

Exemple(s) 178 :

178.1 Dans une usine, trois machines M_1, M_2 et M_3 fabriquent un composant. La première machine en fabrique 2/3, la deuxième 1/6 et la dernière 1/6. Un ingénieur qualité a mesuré que 5% des composants de la première machine sont défectueux alors que 2% de ceux des deux autre machines le sont. Par la formule des probabilités totales, la proportion totale de composants défectueux est :

$$\frac{2}{3} \times \frac{5}{100} + \frac{1}{6} \times \frac{2}{100} + \frac{1}{6} \times \frac{2}{100} = \frac{4}{100}.$$

178.2 Un jeu télévisé se déroule de la façon suivante : une voiture est cachée derrière une des trois portes offertes au candidat, il n'y a rien derrière les deux autres. Le candidat gagne ce qu'il y a derrière la porte qu'il choisit. On demande au candidat de choisir une porte. Le présentateur ouvre alors une porte derrière laquelle la voiture n'est pas, puis propose au candidat de changer de choix. Doit-il le faire ?

(a) *Probabilité de gagner en changeant de porte* : $\frac{1}{3} \times 0 + \frac{2}{3} \times 1 = \frac{2}{3}$.

(b) *Probabilité de gagner sans changer de porte*[1] $\frac{1}{3} \times 1 + \frac{2}{3} \times 0 = \frac{1}{3}$.

Le candidat doit donc changer d'avis.

178.3 Un mobile se déplace sur les sommets A, B et C d'un triangle de la façon suivante : à chaque instant n, si il est sur un sommet, il y reste à l'instant $n+1$ avec probabilité 2/3, sinon il se déplace sur l'un des deux autres avec même probabilité pour chacun des deux sommets. Il débute son parcours sur le sommet A. On note A_n : « le mobile est au sommet A à l'instant n », B_n : « le mobile est au sommet B à l'instant n », C_n : « le mobile est au sommet C à l'instant n », et a_n, b_n et c_n leurs probabilités respectives.

(a) Comme ces trois évènements forment un système complet, $a_n + b_n + c_n = 1$ pour tout n.

(b) Par la formule des probabilités totales, on a :

$$\mathbb{P}(A_{n+1}) = \mathbb{P}(A_{n+1}|A_n) \times \mathbb{P}(A_n) + \mathbb{P}(A_{n+1}|B_n) \times \mathbb{P}(B_n) + \mathbb{P}(A_{n+1}|C_n) \times \mathbb{P}(C_n)$$

donc $a_{n+1} = \frac{2}{3}\, a_n + \frac{1}{6}\, b_n + \frac{1}{6}\, c_n$. De même : $b_{n+1} = \frac{1}{6}\, a_n + \frac{2}{3}\, b_n + \frac{1}{6}\, c_n$ et $c_{n+1} = \frac{1}{6}\, a_n + \frac{1}{6}\, b_n + \frac{2}{3}\, c_n$.

(c) On en déduit, pour tout $n \in \mathbb{N}$ comme le mobile est présent en A initialement :

$$a_{n+1} - b_{n+1} = \frac{1}{2}\,(a_n - b_n) \quad \text{donc} \quad a_n - b_n = \frac{1}{2^n}\,(a_0 - b_0) = \frac{1}{2^n}.$$

De même, $a_n - c_n = \frac{1}{2^n}$ et comme $a_n + b_n + c_n = 1$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{2^{n-1}}\right), \quad b_n = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right), \quad c_n = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right).$$

Propriété(s) 12.1.81 : Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et B un évènement de Ω de probabilité non nulle. L'application :

$$\mathbb{P}_B : \begin{cases} \mathcal{P}(\Omega) & \longrightarrow [0,1] \\ A & \longmapsto \mathbb{P}_B(A) \end{cases}$$

est une probabilité sur Ω.

Démonstration :

1. Comme $A \cap B \subset B$, on a : $0 \leqslant \mathbb{P}(A \cap B) \leqslant \mathbb{P}(B)$. Donc $\mathbb{P}_B(A) \in [0,1]$.
2. On a :
$$\mathbb{P}_B(\Omega) = \frac{\mathbb{P}(B \cap \Omega)}{\mathbb{P}(B)} = 1.$$
3. Enfin, si C et D sont deux évènements incompatibles alors $C \cap B$ et $D \cap B$ aussi, donc :
$$\mathbb{P}_B(C \cup D) = \frac{\mathbb{P}((C \cup D) \cap B}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}((C \cap B) \cup (D \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(C \cap B) + \mathbb{P}(D \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = P_B(C) + P_B(D).$$

■

Propriété(s) 12.1.82 : (formules de Bayes) Soit A et B des évènements de probabilités non nulle. Alors :

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(B|A) \times \mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}.$$

Démonstration : Par la formule des probabilités composées, on a :

$$\mathbb{P}(A|B) \times \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B|A) \times \mathbb{P}(A).$$

■

1. ou, plus simplement : $1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$.

Remarque(s) 117 : 1. Donc, par la formule des probabilités totales, si $A_1, A_2, \dots, A_n$ est un système complet d'évènements de probabilités non nulles. Alors :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad \mathbb{P}(A_i|B) = \frac{\mathbb{P}(B|A_i) \times \mathbb{P}(A_i)}{\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(B|A_k) \times \mathbb{P}(A_k)}.$$

2. Le cas particulier le plus important de la formule précédente est celui dans lequel le système complet d'évènements est composé de A et $\bar{A}$. On a alors :

$$\boxed{\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(B|A) \times \mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B|A) \times \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B|\overline{A}) \times \mathbb{P}(\overline{A})}.}$$

Exemple(s) 179 :

179.1 R. Nadal gagne 70% de ses matches en grand-chelem et 90% à Roland Garros. Il y a 4 grand-chelem. R. Nadal vient de gagner. Avec quelle probabilité a-t-il joué à Roland Garros ? Notons N : « Nadal a gagné » et « RG la rencontre s'est déroulée à Roland Garros ». Alors :

$$\mathbb{P}(RG|N) = \frac{\mathbb{P}(N|RG) \times \mathbb{P}(RG)}{\mathbb{P}(N)} = \frac{\frac{90}{100} \times \frac{1}{4}}{\frac{70}{100}} = \frac{45}{140} \simeq 0.32.$$

179.2 Un policier arrête un étudiant au retour d'une « soif ». Il sait qu'en moyenne un étudiant sur 10 revient ivre de ce genre de fête. Il dispose d'un test d'alcoolémie qui donne les résultats suivants :

(a) dans 99% des cas, si la personne est ivre, le test est positif,

(b) dans 2% des cas, si la personne est sobre, le test est positif.

L'étudiant effectue le test, qui est positif. Quelle probabilité a-t-il d'être ivre ? Notons I : « l'étudiant est ivre » et « P : « le test est positif ». Alors :

$$\mathbb{P}(I|P) = \frac{\mathbb{P}(P|I) \times \mathbb{P}(I)}{\mathbb{P}(P|I) \times \mathbb{P}(I) + \mathbb{P}(P|\overline{I}) \times \mathbb{P}(\overline{I})} = \frac{\frac{99}{100} \times \frac{1}{10}}{\frac{99}{100} \times \frac{1}{10} + \frac{2}{100} \times \frac{9}{10}} = \frac{99}{117} \simeq 0.85$$

Il arrête alors un étudiant d'une classe plus sérieuse, dont il sait qu'en moyenne 1/100 revient ivre. Le test est également positif. Quelle est la probabilité que l'étudiant soit ivre ?

$$\mathbb{P}(I|P) = \frac{99}{3 \times 99} = \frac{1}{3}.$$

12.1.4 Évènements indépendants

Définition 12.1.71 : *Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. On dit que deux évènements A et B sont indépendants si*

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B).$$

Remarque(s) 118 : 1. Si A et B sont indépendants, alors (A et $\bar{B}$), ($\bar{A}$ et B) et ($\bar{A}$ et $\bar{B}$) aussi.

2. On peut reformuler l'indépendance en termes de probabilités conditionnelles. Si B est de probabilité non nulle, les évènements A et B sont indépendants si et seulement si :

$$\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A).$$

Exemple(s) 180 :

180.1 Les évènements « pile » et « face » sont dépendants si l'on jette une pièce,

180.2 cependant, « la première pièce tombe sur pile » et la « deuxième pièce tombe sur face » sont indépendants si l'on jette deux pièces.

180.3 Bien souvent l'indépendance sera une donnée de l'énoncé.

Définition 12.1.72 : *Soit $A_1, A_2, \dots, A_n$ n évènements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$. on dit que ces évènements sont indépendants si pour tout sous-ensemble I de $[\![1, n]\!]$:*

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \prod_{i\in I} \mathbb{P}(A_i).$$

Remarque(s) 119 : 1. Attention ! L'indépendance deux à deux des évènements ne suffisent pas, comme le montre l'exemple suivant, pour le jet de deux dés :

(a) A_1 : « le résultat du premier dé est pair »

(b) A_2 : « le résultat du deuxième dé est pair »

(c) A_3 : « la somme des deux lancés est impaire »

les évènements considérés sont deux à deux indépendants, mais l'évènement A_3 n'est pas indépendant de $A_1 \cap A_2$.

2. On admettra dans la suite que, comme dans le cas de deux événements, l'indépendance de n événements est stable par passage(s) au(x) complémentaire(s).

12.2 Définition et premiers exemples

12.2.1 Applications linéaires

Définition 12.2.73 : *Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Une fonction $u : E \to F$ est appelée **application linéaire** si elle vérifie :*

$$\forall (x, y) \in E^2 \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad u(x + y) = u(x) + u(y), \quad u(\lambda.x) = \lambda.u(x).$$

*On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F. On parle d'**endomorphismes** si $E = F$. On note $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E.*

Remarque(s) 120 : 1. Si u est une application linéaire alors, (en prenant $\lambda = 0$ dans le deuxième point par exemple) : $\boxed{u(0_E) = 0_F}$. C'est en particulier utile pour montrer qu'une application n'est pas linéaire.

2. Si l'on souhaite condenser un peu le travail lorsqu'on montre qu'une application f est linéaire, il suffit de montrer que :
$$\forall (x, y) \in E^2, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad u(x + \lambda.y) = u(x) + \lambda.u(y)$$
il suffit alors de prendre $\lambda = 1$ pour obtenir la compatibilité avec la somme et $x = 0_E$ pour avoir celle avec le produit externe.

3. La compatibilité des applications linéaires avec la somme et le produit externe se généralise facilement aux combinaisons linéaires. Plus précisément, si $x_1, \dots, x_n$ sont des vecteurs de E et $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ des scalaires de $\mathbb{K}$ et $u \in \mathcal{L}(E, F)$ alors :
$$\boxed{u\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k.x_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k.u(x_k).}$$

Exemple(s) 181 :

181.1 Pour tout espace vectoriel E, l'application Id_E et l'application nulle sont des endomorphismes de E.

181.2 Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. L'application : $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad u(x) = a\,x + b$ est linéaire si et seulement si $b = 0$.

181.3 L'application $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad u(x) = x^2$ n'est pas linéaire.

181.4 L'application $u : (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto (x+y+z, x+y) \in \mathbb{R}^2$ est linéaire.

181.5 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ alors l'application $u : X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mapsto A \times X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est un endomorphisme.

181.6 L'application $u : P \in \mathbb{R}_n[X] \mapsto X \times P'$ est un endomorphisme.

181.7 L'application qui à une fonction associe sa dérivée est une application linéaire de $\mathcal{C}^1(I,\mathbb{K})$ dans $\mathcal{C}(I,\mathbb{K})$.

181.8 L'application qui a une fonction continue sur $[a,b]$ associe son intégrale sur $[a,b]$ est une application linéaire de $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}$

Propriété(s) 12.2.83 : Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Alors $\mathcal{L}(E,F)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, c'est-à-dire qu'il contient le fonction nulle et :

$$\forall (u,v) \in \mathcal{L}(E,F), \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad u+v \in \mathcal{L}(E,F) \quad \text{et} \quad \lambda.u \in \mathcal{L}(E,F).$$

De plus, si G est un troisième $\mathbb{K}$-espace vectoriel :

$$\forall u \in \mathcal{L}(E,F) \forall v \in \mathcal{L}(F,G), \quad v \circ u \in \mathcal{L}(E,G).$$

Démonstration : Montrons le dernier point, les deux autres se montrent de la même façon. Soit $(x,y) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On a :

$$(g \circ f)(x + \lambda.y) = g(f(x+\lambda.y)) \underbrace{=}_{f \in \mathcal{L}(E,F)} g(f(x) + \lambda.f(y)) \underbrace{=}_{g \in \mathcal{L}(F,G)} g(f(x)) + \lambda.g(f(y)) = (g \circ f)(x) + \lambda.g \circ f(y).$$

■

Exemple(s) 182 :

182.1 Si E est un espace préhilbertien réel, un exemple important d'applications linéaires sont les *isométries vectorielles*, c.a.d. les applications $u : E \to E$ qui vérifient :

$$u(0_E) = 0_E \quad \text{et} \quad \forall (x,y) \in E^2, \quad \|u(x) - u(y)\| = \|x - y\|.$$

Démonstration :

(a) Commençons par remarquer qu, si $y = 0_E$ dans la définition :

$$\forall x \in E, \quad \|u(x)\| = \|x\|.$$

(b) Continuons en remarquant que, donc :

$$\forall (x,y) \in E^2, \quad \langle u(x), u(y)\rangle = \frac{1}{2}\left(\|u(x)\|^2 + \|u(y)\|^2 - \|u(x) - u(y)\|^2\right) = \frac{1}{2}\left(\|x\|^2 + \|y\|^2 - \|x-y\|^2\right) = \langle x, y\rangle.$$

(c) Puis, si $x \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\|u(\lambda.x) - \lambda.u(x)\|^2 = \|u(\lambda.x)\|^2 + \lambda^2 \|u(x)\|^2 - 2\,\lambda\,\langle u(\lambda.x), u(x)\rangle$$

Donc par (a) et (b),

$$\|u(\lambda.x) - \lambda.u(x)\|^2 = \|\lambda.x\|^2 + \lambda^2 \|x\|^2 - 2\,\lambda\,\langle \lambda.x, x\rangle = 0.$$

Ce qui montre la compatibilité pour le produit externe. Celle pour la somme se montre de même.

■

En particulier, les rotations et les symétries vectorielles (c.à.d. qui respectent l'origine) sont des applications linéaires.

12.2.2 Matrices et applications linéaires en dimension finie

Dans ce paragraphe, E et F sont deux espaces vectoriels de dimension finie, donc on note $\mathcal{B}_E = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathcal{B}_F = (f_1, \dots, f_m)$ deux bases respectives. Commençons par remarquer qu'**une application linéaire f de E dans F est entièrement déterminée par l'image de $\mathcal{B}_E$**, plus précisément :

$$\forall x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k.e_k \in E, \quad f(x) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k.f(e_k)$$

donc il est nécessaire et suffisant de connaître les valeurs des $f(e_k)$ pour $1 \leqslant k \leqslant n$ pour connaître l'application f.

Exemple(s) 183 :

183.1 Si l'on considère r_θ, la rotation du plan de centre $(0,0)$ et d'angle θ. Alors :

$$r_\theta((1,0)) = (\cos(\theta), \sin(\theta)) \quad \text{et} \quad r_\theta((0,1)) = (-\sin(\theta), \cos(\theta)).$$

Donc, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$r_\theta((x,y)) = r_\theta(x.(1,0) + y.(0,1)) = (x\cos(\theta) - y\sin(\theta), x\sin(\theta) + y\cos(\theta)).$$

183.2 Dans le plan, la symétrie s par rapport à la droite $y = x$ vérifie :

$$s((1,1)) = (1,1), \quad s((-1,1)) = (1,-1)$$

donc, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$s((x,y)) = s\left(\frac{x+y}{2}.(1,1) + \frac{y-x}{2}.(-1,1)\right) = \frac{x+y}{2}.(1,1) + \frac{y-x}{2}.(1,-1) = (y,x)$$

Mais on peut aller plus loin : chacun des vecteurs $f(e_k)$ est entièrement déterminé par ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}_F$:

$$\forall k \in [\![1,n]\!], \exists!(a_{i,k})_{i\in[\![1,m]\!]}, \quad f(e_k) = \sum_{i=1}^{m} a_{i,k}.f_i \tag{12.1}$$

Définition 12.2.74 : *On appelle matrice de f dans le couple de bases $(\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F)$ et on note $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(f)$ la matrice :*

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(f) = (a_{i,k})_{(i,k)\in[\![1,m]\!]\times[\![1,n]\!]} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$$

Remarque(s) 121 :

1. Une façon de se représenter la matrice de f est de l'écrire de la façon suivante :

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(f) = \begin{array}{c} \begin{matrix} f(e_1) & f(e_2) & \dots & f(e_n) \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix} \end{array} \begin{matrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_m \end{matrix}$$

2. Si u est un endomorphisme, il est possible de choisir deux bases différentes de E pour calculer la matrice de u ou seulement une base, dans ce dernier cas, on écrit simplement $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(u)$.

Exemple(s) 184 :

184.1 Soie E de dimension n et $\mathcal{B}_E$ une base de E. Alors :

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B}_E}(\mathrm{Id}_E) = I_n \quad \mathrm{mat}_{\mathcal{B}_E}(0_{\mathcal{L}(E)}) = 0_n.$$

184.2 Dans $\mathbb{R}^2$, la rotation r_θ de centre $(0,0)$ et d'angle θ est une application linéaire. Sa matrice dans la base canonique est :

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(r_\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

184.3 Toujours dans $\mathbb{R}^2$, la symétrie s par rapport à la droite $x = y$ admet pour matrice dans la base canonique :

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(s) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

184.4 L'application linéaire g de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par :

$$g(x, y, z) = (x + y + z, x + 2\,y)$$

admet pour matrice dans les bases canoniques :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Mais attention ! Si l'on considère d'autres bases, par exemple :

$$\mathcal{B} = ((1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)) \quad \text{et} \quad \mathcal{B}' = ((1,1),(1,0)),$$

on a : $g((1,1,1)) = (3,3) = 3.(1,1) + 0.(1,0)$, $g((1,1,0)) = (2,3) = 3.(1,1) + (-1).(1,0)$ et $g((1,0,0)) = (1,1) = 1.(1,1) + 0.(1,0)$ donc :

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(g) = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

184.5 Considérons maintenant l'application linéaire φ de dérivation dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$. Si l'on note $\mathcal{B} = (e_0, e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de cet espace vectoriel, alors $e_0' = 0$ et

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \quad (e_k)' = k.e_{k-1}.$$

Donc dans cette base, la matrice de la dérivation est :

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & n-1 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 0 & n \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Remarque(s) 122 : 1. Revenons sur la formule qui définit la matrice d'une application linéaire. Si l'on note $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}_E}(x)$ le vecteur colonne des coordonnées de $x \in E$ dans la base $\mathcal{B}_E$, alors en lisant la produit colonnes par colonnes :

$$\boxed{\forall x \in E, \quad \mathrm{mat}_{\mathcal{B}_F}(f(x)) = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(f) \times \mathrm{mat}_{\mathcal{B}_E}(x).}$$

2. Réciproquement, si l'on se donne une matrice et un couple de bases, la formule précédente *définit* une application linéaire f. On parle alors d'application linéaire associée à la matrice dans un ce couple de bases. Dans bien des exercices, c'est ainsi que l'on donnera l'application linéaire.

Exemple(s) 185 :

185.1 Le cas le plus fréquent est celui des bases canoniques de $\mathbb{R}^n$. Par exemple, l'application linéaire u associée à la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$ est :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad u(x, y, z) = (x + 2\,y + 3\,z, 4\,x + 5\,y + 6\,z).$$

185.2 Mais si l'on considère la même matrice, pour les bases canoniques de $\mathbb{R}_2[X]$ et $\mathbb{R}_1[X]$ alors l'application linéaire v associée est :

$$\forall P = a + b\,X + c\,X^2 \in \mathbb{R}_2[X], \quad v(a + b\,X + c\,X^2) = (a + 2\,b + 3\,c) + (4\,a + 5\,b + 6\,c)\,X.$$

Propriété(s) 12.2.84 : Soit E, F et G trois espaces vectoriels, $\mathcal{B}_E$, $\mathcal{B}_F$ et $\mathcal{B}_G$ des bases respectives de ces espaces vectoriels. Alors :

$$\forall (u,v)\in\mathcal{L}(E,F)\forall\lambda\in\mathbb{K},\quad \mathrm{mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(u+v)=\mathrm{mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(u)+\mathrm{mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(v)\quad \mathrm{mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(\lambda.u)=\lambda.\,\mathrm{mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(u).$$

De plus :

$$\forall f\in\mathcal{L}(E,F),\forall g\in\mathcal{L}(F,G),\quad \mathrm{mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_G}(g\circ f)=\mathrm{mat}_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_G}(g)\times\mathrm{mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(f).$$

Démonstration : Montrons le dernier point. Les autres se démontrent de la même façon. Par définition :

$$\forall x\in E,\ \mathrm{mat}_{\mathcal{B}_F}(f(x))=\mathrm{mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(f)\times\mathrm{mat}_{\mathcal{B}_E}(x)\quad \forall y\in F,\ \mathrm{mat}_{\mathcal{B}_G}(g(y))=\mathrm{mat}_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_G}(g)\times\mathrm{mat}_{\mathcal{B}_F}(y)$$

on en déduit, en prenant $y=f(x)$ dans la deuxième expression :

$$\forall x\in E,\ \mathrm{mat}_{\mathcal{B}_G}(g(f(x)))=\underbrace{(\mathrm{mat}_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_G}(g)\times\mathrm{mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(f))}_{=\mathrm{mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_G}(g\circ f)}\times\mathrm{mat}_{\mathcal{B}_E}(x).$$

■

Exemple(s) 186 :

186.1 Si, dans le plan, on effectue la symétrie s, la rotation r_θ puis la symétrie s alors :

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(s\circ r_\theta\circ s)=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}\cos(\theta)&-\sin(\theta)\\\sin(\theta)&\cos(\theta)\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos(\theta)&\sin(\theta)\\-\sin(\theta)&\cos(\theta)\end{pmatrix}=\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(r_{-\theta})$$

Donc $s\circ r_\theta\circ s=r_{-\theta}$.

186.2 On peut aussi résonner dans « l'autre sens ». Comme, il est clair géométriquement que $r_\theta^n=r_\theta\circ\cdots\circ r_\theta=r_{n\,\theta}$, on déduit *sans calculs* que :

$$\begin{pmatrix}\cos(\theta)&-\sin(\theta)\\\sin(\theta)&\cos(\theta)\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}\cos(n\,\theta)&-\sin(n\,\theta)\\\sin(n\,\theta)&\cos(n\,\theta)\end{pmatrix}.$$

12.3 Noyau, image et rang d'une application linéaire

12.3.1 Image directe et réciproque d'un sous-espace vectoriel

Si $f:E\to F$ est une fonction quelconque, rappelons que pour tout sous-ensembles A de E et B de F, on définit :

$$f(A)=\{f(x),\quad x\in A\},\quad f^{-1}(B)=\{x\in E,\quad f(x)\in B\}$$

Dans le cas où u est une application linéaire, on a la propriété :

Propriété(s) 12.3.85 : Soit $u\in\mathcal{L}(E,F)$, A un sous-espace vectoriel de E et B un sous-espace vectoriel de F. Alors :

1. $u(A)$ est un sous-espace vectoriel de F,
2. $u^{-1}(B)$ est un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration :

1. (a) $0_E\in A$ car c'est un s.e.v. donc $0_F=u(0_E)\in u(A)$,
   (b) si $(y,y')\in u(A)^2$ et $\lambda\in\mathbb{K}$ alors il existe $(x,x')\in A^2$ tels que $y=u(x)$ et $y'=u(x')$. D'où, comme A est un s.e.v. $x+\lambda.x'\in A$ donc $y+\lambda.y'=u(x+\lambda.x')\in u(A)$
2. (a) $0_F\in B$ car c'est un s.e.v. donc comme $u(0_E)=0_F$, $0_F\in u^{-1}(B)$.
   (b) si $(x,x')\in u^{-1}(B)^2$ et $\lambda\in\mathbb{K}$ alors, comme B est un s.e.v. $u(x+\lambda.x')=u(x)+\lambda.u(x')\in B$ donc $x+\lambda.x'\in u^{-1}(B)$

■

Parmi ces exemples de sous-espaces vectoriels, les deux suivants sont particulièrement intéressants.

12.3.2 Noyau d'une application linéaire.

Définition 12.3.75 : *Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$. On appelle noyau de u l'ensemble :*

$$\mathrm{Ker}(u) = u^{-1}(\{0_E\}) = \{x \in E, \quad u(x) = 0_F\}.$$

Remarque(s) 123 :

1. Pour déterminer le noyau d'une application linéaire, il s'agit donc de résoudre l'équation $f(x) = 0_F$ d'inconnue $x \in E$.
2. Rappelons que, si $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ est un matrice, on appelle noyau de la matrice A l'ensemble :
$$\mathrm{Ker}(A) = \{X \in \mathcal{M}_{q,1}(\mathbb{K}), \quad A \times X = 0_{p,1}\}.$$
Si A est la matrice de u pour le couple de bases $(\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F)$, $\mathrm{Ker}(A)$ représente les coordonnées des éléments de $\mathrm{Ker}(u)$ dans la base $\mathcal{B}_E$.
3. Par la propriété précédente, $\mathrm{Ker}(u)$ est un sous-espace vectoriel de E.

Exemple(s) 187 :

187.1 On a : $\mathrm{Ker}(\mathrm{Id}_E) = \{0_E\}$, $\mathrm{Ker}(0_{\mathcal{L}(E)}) = E$.

187.2 L'application linéaire g de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par :

$$g(x,y,z) = (x+y+z, x+2\,y)$$

admet pour noyau :

$$\mathrm{Ker}(g) = \{(-2\,z, z, z), \quad z \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}((-2,1,1))$$

plus généralement, pour déterminer un noyau d'une application linéaire de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^q$, il s'agit de résoudre un système, ce qui se fait à l'aide du pivot de Gauß.

187.3 Lorsqu'une application linéaire est associée à une matrice dans une couple de bases, déterminer son noyau revient à calculer la noyau de cette matrice. Par exemple, si $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ est l'application linéaire associée à la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

dans les bases canoniques, alors $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \in \mathrm{Ker}(u)$ si et seulement si :

$$\begin{cases} x + 2\,y + 3\,z = 0 \\ 4\,x + 5\,y + 6\,z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x + 2\,y + 3\,z = 0 \\ y + 2\,z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x + - z = 0 \\ y + 2\,z = 0 \end{cases}$$

Donc

$$\mathrm{Ker}(u) = \{(z, -2\,z, z), z \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}((1,-2,1)).$$

Attention cependant ! Si l'on considère l'application linéaire $v : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_1[X]$ associée à A dans les bases canoniques, son noyau *doit* être constitué de polynômes. On a

$$\mathrm{Ker}(v) = \{z - 2\,z\,X + z\,X^2, \quad z \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}(1 - 2\,X + X^2)$$

187.4 On considère l'application linéaire :

$$u : \mathcal{D}^2(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}), \quad u(f) = f'' + f$$

Alors $\mathrm{Ker}(u)$ est constitué des solutions de l'équation différentielle $y'' + y = 0$ donc :

$$\mathrm{Ker}(u) = \{A\cos + B\sin, \quad (A,B) \in \mathbb{R}^2\} = \mathrm{Vect}(\cos, \sin).$$

187.5 En particulier, les solutions d'équations différentielles sans second membre forment des espaces vectoriels car ce sont des noyaux. On retrouve de même la plupart des exemples classiques d'espaces vectoriels : les solutions d'un système linéaire d'équations sans second membre est également un noyau par exemple.

Propriété(s) 12.3.86 : Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$. Alors u est injective si et seulement si $\mathrm{Ker}(u) = \{0_E\}$.

Démonstration : Clairement, si u est injective, $\mathrm{Ker}(u) = \{0_E\}$. Réciproquement, si x et y vérifient $u(x) = u(y)$ alors comme u est linéaire :

$$u(x-y) = 0_F$$

donc $x - y \in \mathrm{Ker}(u) = \{0_E\}$ donc $x - y = 0_E$ et finalement $x = y$.

■

12.3.3 Image d'une application linéaire.

L'image d'une application linéaire $u \in \mathcal{L}(E,F)$ est définie de la même façon que pour une application quelconque :

$$\boxed{\mathrm{Im}(u) = u(E) = \{u(x), \quad x \in E\}.}$$

Remarque(s) 124 :

1. Par analogie, si $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ est un matrice, on appelle image de la matrice A l'ensemble :

$$\mathrm{Im}(A) = \{A \times X, \quad X \in \mathcal{M}_{q,1}(\mathbb{K})\}.$$

   Si A est la matrice de u pour le couple de bases $(\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F)$, $\mathrm{Im}(A)$ représente les coordonnées des éléments de $\mathrm{Im}(u)$ dans la base $\mathcal{B}_F$.

2. Une méthode pour calculer une base de l'image d'une application linéaire est d'utiliser la fait suivant :

$$\boxed{\text{si } (e_1, e_2, \ldots, e_n) \text{ est génératrice de } E \text{ alors } (u(e_1), u(e_2), \ldots, u(e_n)) \text{ est génératrice de } \mathrm{Im}(E)}$$

   il suffit donc d'extraire de la famille génératrice $(u(e_1), u(e_2), \ldots, u(e_n))$ une famille libre pour trouver une base de l'image de u.

3. Par la première propriété de ce paragraphe, $\mathrm{Im}(u)$ est un sous-espace vectoriel de F.

Exemple(s) 188 :

188.1 On a : $\mathrm{Im}(Id_E) = E, \quad \mathrm{Im}(0_{\mathcal{L}(E)}) = \{0_E\}$.

188.2 Considérons l'application linéaire $u : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ associée dans les bases canoniques à la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Alors $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Vect}((1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,1))$. Comme la famille de ces trois vecteurs est clairement libre, il s'agit donc d'une base de l'image de u.

188.3 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Considérons l'application linéaire de dérivation $v : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Alors :

$$\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Vect}(u(1), u(X), \ldots, u(X^n)) = \mathrm{Vect}(1, \ldots, n\,X^{n-1}) = \mathbb{R}_{n-1}[X].$$

Remarquons enfin que, comme pour toute fonction :

Propriété(s) 12.3.87 : Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$. Alors u est surjective si et seulement si $\mathrm{Im}(u) = F$.

12.3.4 Théorème du rang

Définition 12.3.76 : *Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$. Si $\mathrm{Im}(u)$ est de dimension finie, on dit que u est de rang fini et on appelle rang de u la quantité :*

$$\mathrm{rg}(u) = \dim(\mathrm{Im}(u)).$$

Remarque(s) 125 : Si F est de dimension finie, alors $\mathrm{rg}(u) \leqslant \dim F$ et u est surjective si et seulement si ces quantités sont égales.

Théorème 12.3.41 (théorème du rang) : *Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$. Alors u est de rang fini et :*

$$\mathrm{rg}(u) + \dim(\mathrm{Ker}(u)) = \dim(E).$$

Démonstration : Commençons par remarquer que comme E admet une famille génératrice finie, $\mathrm{Im}(E)$ admet pour famille génératrice finie l'image de cette famille. Donc u est de rang fini. Considérons maintenant deux bases :

$$(k_1, k_2, \dots, k_n) \quad \text{de} \quad \mathrm{Ker}(u) \quad \text{et} \quad (y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2), \dots, y_m = f(x_m)) \quad \text{de} \quad \mathrm{Im}(u).$$

Nous allons montrer que la famille $(k_1, \dots, k_n, x_1, \dots, x_m)$ est une base de E, le théorème s'en déduit alors immédiatement.

1. Soit $x \in E$. Alors $f(x) \in \mathrm{Im}(u)$ donc :

$$\exists (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{K}^m, \quad u(x) = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k.y_k = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k.u(x_k) = u\left(\sum_{k=1}^{m} \lambda_k.x_k\right).$$

Mais alors, $x - \sum_{k=1}^{m} \lambda_k.x_k \in \mathrm{Ker}(u)$ donc :

$$\exists (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n) \in \mathbb{K}^n, \quad x - \sum_{k=1}^{m} \lambda_k.x_k = \sum_{i=1}^{n} \mu_i.k_i.$$

Le vecteur x s'écrit donc comme une combinaison linéaire des vecteurs de la famille, qui est donc génératrice.

2. Supposons maintenant que, pour $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{K}^m$ et $(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n) \in \mathbb{K}^n$,

$$\sum_{k=1}^{m} \lambda_k.x_k + \sum_{i=1}^{n} \mu_i.k_i = 0_E$$

alors, en appliquant u et en se souvenant que les k_i sont dans le noyau de u :

$$\sum_{k=1}^{m} \lambda_k.\underbrace{u(x_k)}_{=y_k} = u\left(\sum_{k=1}^{m} \lambda_k.x_k\right) = u\left(\sum_{k=1}^{m} \lambda_k.x_k + \sum_{i=1}^{n} \mu_i.k_i\right) = 0_F$$

donc comme la famille $(y_1, y_2, \dots, y_m)$ est libre, tous les λ_i sont nuls. On a finalement l'égalité :

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_i.k_i = 0_E$$

qui implique la nullité de tous les μ_i car la famille $(k_1, k_2, \dots, k_n)$ est libre.

■

Remarque(s) 126 : Ce théorème nous permet, en dimension finie connue, de « réduire » un peu le travail à effectuer pour calculer un noyau et une image :

1. (le plus souvent) si l'on a calculé le noyau d'une application linéaire, on peut grâce au théorème du rang en déduire la dimension de l'image. Il suffit alors de trouver le bon nombre de vecteurs linéairement indépendants de l'image pour en obtenir une base,

2. (parfois) si l'on a calculé le rang ou l'image de l'application linéaire, le théorème peut nous permettre de réduire de même les calculs nécessaires à la détermination du noyau.
3. Si A est la matrice de u dans un couple de bases, alors comme $\mathrm{Ker}(A)$ représente les coordonnées des éléments de $\mathrm{Ker}(u)$ dans une base, $\dim \mathrm{Ker}(A) = \dim \mathrm{Ker}(u)$. On en déduit que

$$\boxed{\mathrm{rg}(u) = \mathrm{rg}(A).}$$

Exemple(s) 189 :

189.1 Calculons une base de l'image et une base du noyau de l'application linéaire

$$\begin{array}{rccc} f\ : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^5 \\ & (x,y,z) & \longmapsto & (x+y, x+y+z, 2\,x+y+z, 2\,x+2\,y+z, y+z) \end{array}$$

Pour déterminer son noyau, il s'agit de résoudre le système :

$$\begin{cases} x+y=0 \\ x+y+z=0 \\ 2\,x+y+z=0 \\ 2\,x+2\,y+z=0 \\ y+z=0 \end{cases} \iff x=y=z=0$$

Donc $\mathrm{Ker}(f) = \{(0,0,0)\}$. Donc par le théorème du rang, $\mathrm{rg}(f) = 3$ d'où comme la famille

$$f((1,0,0)) = (1,1,2,2,0), f((0,1,0)) = (1,1,1,2,1), f((0,0,1)) = (0,1,1,1,1)$$

a trois éléments et est génératrice de $\mathrm{Im}(f)$, c'est une base de $\mathrm{Im}(f)$.

189.2 Soit a un réel. On considère l'application linéaire définie par :

$$f((1,0,0)) = (1,0,a) \quad f((0,1,0)) = (a,0,a), \quad f((0,0,1)) = (a,a,1)$$

sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est donc :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ 0 & 0 & a \\ a & a & 1 \end{pmatrix}.$$

On a :

$$A \sim_L \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ 0 & a\,(1-a) & 1-a^2 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}.$$

On en déduit que :

(a) si $a \neq 0$ et $a \neq 1$, $\mathrm{Ker}(f) = \{(0,0,0)\}$ donc par le théorème du rang, $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^3$,

(b) si $a = 0$ alors : $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}((0,1,0))$ donc par le théorème du rang, $\mathrm{Im}(f)$ est de dimension deux. Donc, comme la famille $(1,0,0),(0,0,1)$ est libre, $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}((1,0,0),(0,0,1))$,

(c) si $a = 1$, $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}((1,1,0))$ donc par le théorème du rang, $\mathrm{Im}(f)$ est de dimension deux. Donc, comme la famille $(1,0,1),(1,1,1)$ est libre, $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}((1,0,1),(1,1,1))$.

189.3 On considère l'endomorphisme :

$$u : \begin{cases} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \longmapsto & (X^2-1)\,P'' + 2\,X\,P' \end{cases}$$

Alors la matrice de u dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ est :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

donc $\mathrm{rg}(u) = 2$. Par le théorème du rang, $\dim \mathrm{Ker}(u) = 1$ donc comme $1 \in \mathrm{Ker}(u)$, $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Vect}(1)$.

12.4 Isomorphismes d'espaces vectoriels

12.4.1 Définition et premières propriétés

Définition 12.4.77 : *Soit E et F deux espaces vectoriels. Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$. On dit que u est un isomorphisme si u est bijectif. Si $E = F$, on parle d'automorphisme.*

Remarque(s) 127 :

1. On note $\mathcal{GL}(E)$ l'ensemble des automorphismes d'un espace vectoriel E.
2. Si u est un isomorphisme, alors $\mathrm{Ker}(u) = \{0_E\}$ et $\mathrm{Im}(u) = F$.
3. Par le théorème du rang, si u est un isomorphisme et E ou F est de dimension finie, alors les deux espaces sont de dimension finie et :
$$\boxed{\dim(E) = \dim(F).}$$

Exemple(s) 190 :

190.1 Si E est un espace vectoriel, alors Id_E est un automorphisme.

190.2 Il existe donc un isomorphisme : $v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, si et seulement si $n = m$.

190.3 Si E et F sont de dimension finies, de bases respectives $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$ alors :
$$u : \begin{cases} \mathcal{L}(E,F) & \to & \mathcal{M}_{\dim F, \dim E}(\mathbb{K}) \\ u & \mapsto & \mathrm{mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(u) \end{cases}$$
est un isomorphisme : la matrice d'une application linéaire dans un couple de bases la détermine. En particulier : $\dim \mathcal{L}(E,F) = \dim E \times \dim F$.

190.4 On considère $\mathcal{U}$, l'ensemble des suites qui vérifient la relation de récurrence :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} = 2\,u_{n+2} + u_{n+1} - 2\,u_n$$
On vérifie facilement que c'est un espace vectoriel. De plus, comme une telle suite est exactement déterminée par ses trois premiers termes,
$$\varphi \begin{cases} \mathcal{U} & \to & \mathbb{R}^3 \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \longmapsto & (u_0,u_1,u_2) \end{cases}$$
est un isomorphisme. On en déduit que $\dim \mathcal{U} = 3$. Pour trouver une base de cet espace, on cherche des suites géométriques en résolvant l'équation caractéristique :
$$x^3 - 2\,x^2 - x + 2 = 0 \iff x = 1 \text{ ou } x = -1 \text{ ou } x = 2$$
La famille de suites $(1)_{n\in\mathbb{N}}, ((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}, (2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant (facilement) libre, on en déduit :
$$\mathcal{U} = \mathrm{Vect}((1)_{n\in\mathbb{N}}, ((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}, (2^n)_{n\in\mathbb{N}}) = \{(A + B\,(-1)^n + C\,2^n)_{n\in\mathbb{N}}, \quad (A,B,C) \in \mathbb{R}^3\}.$$

Propriété(s) 12.4.88 : Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$ un isomorphisme. Alors $u^{-1} \in \mathcal{L}(F,E)$.

Démonstration : Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ et $(y_1,y_2) \in F^2$. Alors comme u est surjective, il existe $(x_1,x_2) \in E^2$ tels que : $y_1 = u(x_1)$ et $y_2 = u(x_2)$. On en déduit, comme u est linéaire :
$$u^{-1}(y_1 + \lambda.y_2) = u^{-1}(u(x_1) + \lambda.u(x_2)) = u^{-1}(u(x_1 + \lambda.x_2)) = x_1 + \lambda.x_2 = u^{-1}(y_1) + \lambda.u^{-1}(y_2).$$
■

Remarque(s) 128 : De plus, si $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et $v \in \mathcal{L}(F,G)$ sont des isomorphismes alors $v \circ u$ est linéaire et comme pour toutes fonctions : $(v \circ u)^{-1} = v^{-1} \circ u^{-1}$.

Propriété(s) 12.4.89 : Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$. On suppose que E et F sont de dimension finie et $\boxed{\dim(E) = \dim(F)}$. Alors :

$$u \text{ est injective} \iff u \text{ est surjective} \iff u \text{ est bijective.}$$

Démonstration : Le troisième point implique par définition les deux premiers ; pour les réciproques, on écrit le théorème du rang :

$$\dim(F) = \dim(E) = \operatorname{rg}(u) + \dim(\operatorname{Ker}(u)).$$

1. Si u est injective, $\dim(\operatorname{Ker}(u)) = 0$ donc $\operatorname{rg}(u) = \dim(F)$, l'application u est donc aussi surjective,
2. si u est surjective, $\operatorname{rg}(u) = \dim(F)$ donc $\dim(\operatorname{Ker}(u)) = 0$, l'application u est donc aussi injective.

■

Remarque(s) 129 :

1. Un cas particulier de ce théorème est celui des endomorphismes en dimension finie.
2. Attention ! Ce théorème est faux si l'on n'est pas en dimension finie. Par exemple, l'application linéaire de dérivation sur $E = \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ est surjective car toute fonction dérivable admet une primitive mais pas injective car les fonctions constantes sont de dérivée nulle.

Exemple(s) 191 :

191.1 Considérons l'application linéaire :

$$\varphi : \begin{cases} \mathcal{S}_2(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{A}_3(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Alors clairement, $\operatorname{Ker}(\varphi) = \{0_2\}$ donc φ est injective. Mais $\dim \mathcal{S}_2(\mathbb{R}) = 3 = \dim \mathcal{A}_3(\mathbb{R})$ donc φ est un isomorphisme.

191.2 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Alors l'application linéaire :

$$\varphi : X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \mapsto A \times X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$$

est bijective si et seulement si elle est injective, autrement dit, le système $A \times X = B$ admet une unique solution si et seulement si $\operatorname{Ker}(A) = \{0_{n,1}\}$ ou encore A est inversible si et seulement si $\operatorname{Ker}(A) = \{0_{n,1}\}$.

191.3 Montrons que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ alors A est inversible si et seulement si A est inversible à droite si et seulement si A est inversible à gauche.

Démonstration : Si A est inversible à droite (d'inverse B), alors si :

$$\psi : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mapsto A \times M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

ψ est linéaire et comme A est inversible à droite $\operatorname{Ker}(\psi) = \{0_{n,1}\}$. Donc ψ est surjective. D'où :

$$\exists C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \quad \psi(C) = I_n$$

c'est-à-dire : $A \times C = I_n$. Enfin :

$$B = B \times A \times C = C$$

donc A est inversible.

■

Propriété(s) 12.4.90 : Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et $v \in \mathcal{L}(F,G)$. Alors :

$$\operatorname{rg}(v \circ u) \leqslant \max(\operatorname{rg}(u), \operatorname{rg}(v)).$$

De plus, si u est un isomorphisme, $\operatorname{rg}(v \circ u) = \operatorname{rg}(v)$, et si v est un isomorphisme : $\operatorname{rg}(v \circ u) = \operatorname{rg}(u)$.

Démonstration : On a : $v(u(E)) \subset v(F)$ donc $\text{rg}(v \circ u) \leqslant \text{rg}(v)$. De plus si $f_1, f_2, \dots, f_n$ est une base de $\text{Im}(u)$ alors $v(f_1), v(f_2), \dots, v(f_n)$ est une famille génératrice de $\text{Im}(v \circ u) = v(\text{Im}(u))$ donc $\text{rg}(v \circ u) \leqslant \text{rg}(u)$.
Pour les cas d'égalité, on remarque par exemple que, si v est un isomorphisme :

$$\text{rg}(u) = \text{rg}(v^{-1} \circ v \circ u) \leqslant \max(\text{rg}(v^{-1}), \text{rg}(v \circ u)) = \text{rg}(v \circ u) \leqslant \text{rg}(u).$$

■

Propriété(s) 12.4.91 : Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$, E de dimension finie et $\mathcal{B}_E = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E. Alors

1. u est injective si et seulement si $u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_n)$ est libre.
2. u est surjective si et seulement si $u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_n)$ est génératrice de F
3. u est un isomorphisme si et seulement si $u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_n)$ est une base de F.

Démonstration :

1. Si u est injective alors si il existe $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ des scalaires tels que :
$$\lambda_1.u(e_1) + \lambda_2.u(e_2) + \cdots + \lambda_n.u(e_n) = 0_E$$
alors :
$$u(\lambda_1.e_1 + \lambda_2.e_2 + \cdots + \lambda_n.e_n) = 0_E$$
donc comme u est injective :
$$\lambda_1.e_1 + \lambda_2.e_2 + \cdots + \lambda_n.e_n = 0_E$$
d'où comme $e_1, e_2, \dots, e_n$ est libre, $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$. La famille $u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_n)$ est donc libre.
Réciproquement, si cette famille est supposée libre, si $x \in \text{Ker}(u)$ alors comme $e_1, \dots, e_n$ est génératrice il existe des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tels que :
$$x = \lambda_1.e_1 + \cdots + \lambda_n.e_n$$
donc comme u est linéaire et $x \in \text{Ker}(u)$:
$$0_E = \lambda_1.u(e_1) + \cdots + \lambda_n.u(e_n)$$
d'où comme $u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_n)$ est libre : $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$ donc $x = 0_E$.
2. Si cette famille est génératrice de $\text{Im}(u)$, elle est donc génératrice de F si et seulement si $F = \text{Im}(u)$ ou encore u est surjective.

■

12.4.2 Matrices d'isomorphismes, changements de base

Dans ce paragraphe, tous les espaces vectoriels sont de dimension finie.

Propriété(s) 12.4.92 : Soit E et F deux espaces vectoriels de bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$. Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors u est un isomorphisme si et seulement si $\text{mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(u)$ est inversible. De plus, dans ce cas :

$$\text{mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(u)^{-1} = \text{mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E}(u^{-1}).$$

Démonstration : Le premier point est par exemple une application de l'égalité des rangs entre une application linéaire et sa matrice dans un couple de bases. Pour le deuxième, il suffit d'appliquer les formules donnant les matrices d'applications linéaires à $u \circ u^{-1} = \text{Id}_E$.

■

Remarque(s) 130 : En particulier, multiplier une matrice par une matrice inversible ne modifie pas son rang. C'est en particulier le cas pour les matrices d'opérations élémentaire, donc les opérations élémentaires (sur les lignes et le colonnes) ne modifient pas le rang de la matrice.

Exemple(s) 192 :

192.1 Montrons que l'application linéaire :

$$u : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x-z, x-y, x-y+z) \end{cases}$$

est inversible et calculons u^{-1}. Sa matrice est, dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et on a déjà calculé l'inverse de A dans le paragraphe concernant le Pivot de Gauß : $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ donc u est inversible et :

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad u^{-1}(x,y,z) = (x-y+z, x-2\,y+z, -y+z).$$

Définition 12.4.78 : *Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ deux bases de E. On appelle matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ et on note $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ la matrice de l'identité dans le couple de bases $(\mathcal{B}', \mathcal{B})$:*

$$P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_E) = \begin{array}{c} \begin{matrix} e'_1 & e'_2 & \dots & e'_n \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} & \dots & p_{1,n} \\ p_{2,1} & p_{2,2} & \dots & p_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{n,1} & p_{n,2} & \dots & p_{n,n} \end{pmatrix} \end{array} \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{matrix} \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K}).$$

Remarque(s) 131 :

1. Par définition, on a donc $\boxed{(P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'})^{-1} = P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}}$.
2. Une bonne façon de retenir la définition de cette matrice est la suivante :

> Les colonnes de la matrice de passage sont les coordonnées dans l'ancienne base des vecteurs de la nouvelle base.

Théorème 12.4.42 (formule de changement de base) : *Soit $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}'_E$ deux bases de E et $\mathcal{B}_F$ et $\mathcal{B}'_F$ deux bases de F. Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$. Alors :*

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B}'_E,\mathcal{B}'_F}(u) = P_{\mathcal{B}'_F}^{\mathcal{B}_F} \times \mathrm{mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(u) \times P_{\mathcal{B}_E}^{\mathcal{B}'_E}.$$

Démonstration : Écrivons le membre de droite de l'égalité :

$$P_{\mathcal{B}'_F}^{\mathcal{B}_F} \times \mathrm{mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(u) \times P_{\mathcal{B}_E}^{\mathcal{B}'_E} = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}'_F}(\mathrm{Id}_F) \times \mathrm{mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(u) \times \mathrm{mat}_{\mathcal{B}'_E,\mathcal{B}_E}(\mathrm{Id}_E) = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}'_E,\mathcal{B}'_F}(\underbrace{\mathrm{Id}_F \circ u \circ \mathrm{Id}_E}_{=u}).$$

■

Remarque(s) 132 : La cas le plus utilisé est celui d'un endomorphisme. Si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases de E et $u \in \mathcal{L}(E)$, alors :

$$\boxed{\mathrm{mat}_{\mathcal{B}'}(u) = P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} \times \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(u) \times P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = (P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'})^{-1} \times \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(u) \times P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}}.$$

Exemple(s) 193 :

193.1 Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Soit $\mathcal{C}$ une nouvelle base de $\mathbb{R}^3$ constituée des vecteurs $\varepsilon_1 = (1,0,1), \varepsilon_2 = (-1,1,0), \varepsilon_3 = (1,1,1)$. On a :

$$P = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Un rapide pivot de Gauß nous donne :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

On remarque que $f(\epsilon_1) = \epsilon_1$, $f(\epsilon_2) = \epsilon_2$ et $f(\epsilon_3) = \epsilon_1 + \epsilon_3$ donc la matrice de f dans $\mathcal{C}$ est :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{donc} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad B^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Par la formule de changement de base, on a donc :

$$A = P \times B \times P^{-1}.$$

On en déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = P \times B^n \times P^{-1} = \begin{pmatrix} n+1 & n & -n \\ 0 & 1 & 0 \\ n & n & 1-n \end{pmatrix}.$$

Définition 12.4.79 : *Deux matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont dites semblables si elles représentent le même endomorphisme dans deux bases différentes, autrement dit, s'il existe une patrice inversible P telle que :*

$$B = P^{-1} \times A \times P$$

Exemple(s) 194 :

194.1 Par l'exemple précédent, les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

sont semblables.

194.2 Déterminer si deux matrices sont semblables n'est pas toujours facile, cependant on peut facilement affirmer que les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ne sont pas semblables car $\mathrm{tr}(A) \neq \mathrm{tr}(B)$. En effet, si A et B étaient semblables, alors :

$$\mathrm{tr}(B) = \mathrm{tr}(P^{-1} \times A \times P) = \mathrm{tr}(A \times P \times P^{-1}) = \mathrm{tr}(A).$$

Deux matrices semblables doivent également avoir le même rang. Mais ni l'égalité de la trace ni celle des rangs n'implique que deux matrices sont semblables.

12.5 Quelques applications linéaires particulières.

12.5.1 Formes linéaires

.

Définition 12.5.80 : *Soit E un espace vectoriel. Une forme linéaire sur E est une application linéaire $u \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$. On appelle hyperplan de E tout noyau d'une forme linéaire non nulle.*

Remarque(s) 133 : Dans le cas où E est de dimension finie n un hyperplan est donc de dimension $n-1$ par le théorème du rang. De plus, si $e_1, e_2, \dots, e_n$ est une base de E, $x = x_1.e_1 + x_2.e_2 + \cdots + x_n.e_n$ appartient à l'hyperplan $H = \mathrm{Ker}(u)$ si et seulement si :

$$a_1\, x_1 + a_2\, x_2 + \cdots + a_n\, x_n = 0$$

où pour tout i, $u(e_i) = a_i \in \mathbb{K}^*$. On appelle une telle équation équation de l'hyperplan H.

Exemple(s) 195 :

195.1 Si $E = \mathcal{F}(I, \mathbb{K})$ alors si $a \in I$ l'application linéaire

$$\varphi : f \in E \longmapsto f(a) \in \mathbb{K}$$

est une forme linéaire.

195.2 Si $E = \mathcal{C}^0([a,b], \mathbb{K})$ alors :

$$\psi : f \in E \longmapsto \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \in \mathbb{K}$$

est une forme linéaire.

Propriété(s) 12.5.93 : Soit $H = \mathrm{Ker}(u)$ un hyperplan de E alors si D est une droite non contenue dans H :

$$E = H \oplus D.$$

Démonstration : Comme D n'est pas incluse dans E, $E \cap D = \{0_E\}$. De plus, si d est un vecteur de D d'image non nulle par u alors, pour tout $x \in E$:

$$x = \underbrace{x - (u(x)/u(d)).d}_{\in H = \mathrm{Ker}(u)} + \underbrace{(u(x)/u(d)).d}_{\in D}.$$

donc $E = D + H$.

■

12.5.2 Projections et symétries : le cas général

Proposition 12.5.16 : *Soit $E = F \oplus G$. Soit $u \in \mathcal{L}(F, H)$ et $v \in \mathcal{L}(G, H)$. alors il existe une unique application linéaire $w \in \mathcal{L}(E, H)$ telle que la restrictions de w à F soit u et la restrictions de w à G soit v.*

Démonstration : Si w existe alors pour tout $f \in F$ et $g \in G$:

$$w(f+g) = u(f) + v(g)$$

ce qui prouve l'unicité. De plus si l'on définit (ce qui est possible car l'écriture existe et définit bien une fonction car l'écriture est unique) une fonction w de cette façon, elle est linéaire car : pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ et $(x, x') \in E^2$ il existe des uniques $(f, f') \in F^2$ et $(g, g') \in G^2$ tels que $x = f + g$ et $x' = f' + g'$. Mais alors :

$$w(\lambda.x + x') = w(\lambda.g + g' + \lambda.f + f') = u(\lambda.f + f') + v(\lambda.g.g') = \lambda.(u(f) + v(g)) + u(f') + v(g') = \lambda.w(x) + w(x').$$

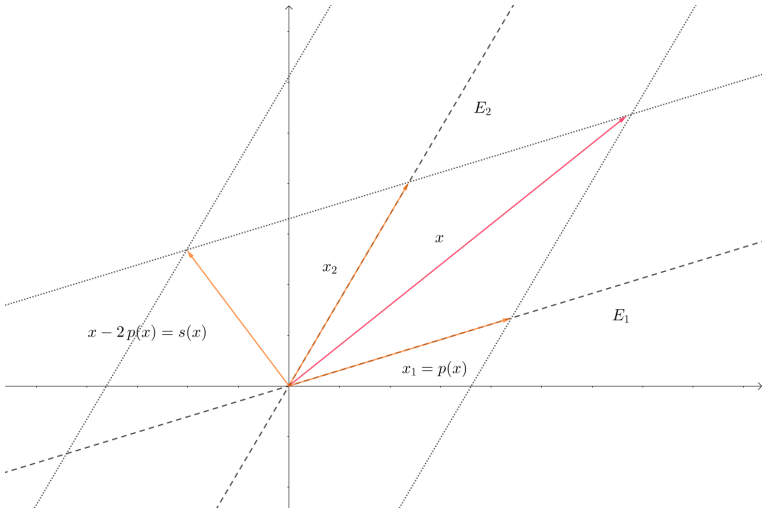
■

Remarque(s) 134 : On notera alors $w = u \oplus v$. (attention, notation non standard !)

Définition 12.5.81 : *Soit $E = E_1 \oplus E_2$. Alors on appelle :*

1. *Projection sur E_1 parallèlement à E_2 l'endomorphisme : $p = \mathrm{Id}_{E_1} \oplus 0_{\mathcal{L}(E_2)}$.*
2. *Symétrie par rapport à E_2 parallèlement à E_1 l'endomorphisme : $s = \mathrm{Id}_E - 2\,p = (-\mathrm{Id}_{E_1}) \oplus \mathrm{Id}_{E_2}$.*

Remarque(s) 135 : 1. Tout se résume sur un dessin :



2. Nous dirons dans la suite que p est la projection associée à s.
3. Si p est la projection sur E_1 parallèlement à E_2 alors $\mathrm{Id}_E - p$ est la projection sur E_2 parallèlement à E_1.

Propriété(s) 12.5.94 : 1. Un endomorphisme $p \in \mathcal{L}(E)$ est une projection si et seulement si $p \circ p = p$. Dans ce cas, p est la projection sur $\mathrm{Im}(p) = \mathrm{Ker}(p - \mathrm{Id}_E)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(p)$.

2. Un endomorphisme $s \in \mathcal{L}(E)$ est une symétrie si et seulement si $s \circ s = \mathrm{Id}_E$. Dans ce cas, s est la symétrie par rapport à $\mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E)$.

Démonstration : Le sens direct de (1) est immédiat.
Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ tel que $p \circ p = p$. Montrons que $E = \mathrm{Ker}(p) \oplus \mathrm{Im}(p)$.

1. Soit $y \in \mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Im}(p)$. Alors comme $y \in \mathrm{Im}(p)$, il existe $x \in E$, $y = p(x)$. Mais alors comme $y \in \mathrm{Ker}(p)$: $p(y) = 0$ mais comme $p \circ p = p$, $y = p(x) = p(p(x)) = p(y) = 0$.
2. Soit maintenant $x \in E$. Alors :
$$x = x - p(x) + p(x)$$
et $p(x) \in \mathrm{Im}(p)$, $p(x - p(x)) = p(x) - p(p(x)) = p(x) - p(x) = 0_E$ donc $x - p(x) \in \mathrm{Ker}(p)$.

Pour le deuxième point, il suffit d'utiliser $p = \frac{1}{2}(\mathrm{Id}_E - s)$ et le point précédent.

■

Remarque(s) 136 : En termes de matrices, en choisissant une base adaptée à $\mathrm{Ker}(p) \oplus \mathrm{Im}(p)$ (resp. $\mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E) \oplus$

$\mathrm{Ker}(s+\mathrm{Id}_E)$) une projection p admet pour matrice P (resp. une symétrie s admet pour matrice S) :

$$P=\begin{pmatrix}0&0&\cdots&\cdots&\cdots&0\\0&\ddots&\ddots&&&\vdots\\\vdots&\ddots&0&\ddots&&\vdots\\\vdots&&\ddots&1&\ddots&\vdots\\\vdots&&&\ddots&\ddots&0\\0&\cdots&\cdots&\cdots&0&1\end{pmatrix}\quad S=\begin{pmatrix}1&0&\cdots&\cdots&\cdots&0\\0&\ddots&\ddots&&&\vdots\\\vdots&\ddots&1&\ddots&&\vdots\\\vdots&&\ddots&-1&\ddots&\vdots\\\vdots&&&\ddots&\ddots&0\\0&\cdots&\cdots&\cdots&0&-1\end{pmatrix}$$

Exemple(s) 196 :

196.1 L'endomorphisme u de $\mathbb{R}^2$ de matrice dans la base canonique $M=\begin{pmatrix}1&-1\\0&0\end{pmatrix}$ est une projection. En effet : $M^2=M$. Pour déterminer ses éléments géométriques, on remarque que $\mathrm{Ker}(u)=\mathrm{Vect}((1,1))$ et $\mathrm{Im}(u)=\mathrm{Vect}((1,0))$ il s'agit donc de la projection sur $\mathrm{Vect}((1,0))$ parallèlement à $\mathrm{Vect}((1,1))$.

196.2 On considère : l'endomorphisme v de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans les bases canoniques est :

$$A=\begin{pmatrix}-1&-2&-2\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

Alors $A^2=I_3$ donc v est une symétrie. De plus, $\mathrm{Ker}(v-\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3, x+y+z=0\}$ et $\mathrm{Ker}(v+\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})=\mathrm{Vect}((1,0,0))$ donc v est la symétrie par rapport qu plan d'équation $x+y+z=0$ parallèlement à la droite dirigée par $(1,0,0)$.

12.5.3 Le cas euclidien

Dans ce paragraphe, E est un espace euclidien.

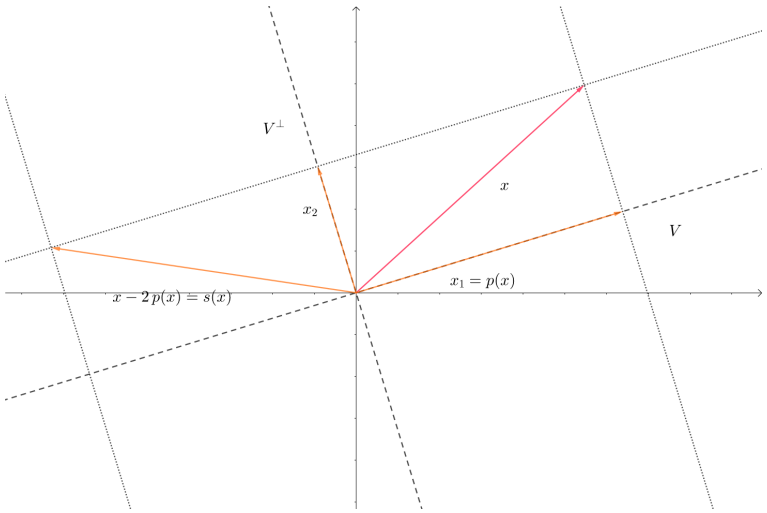
Définition 12.5.82 : *Soit V un sous-espace vectoriel de E. On rappelle que :*

$$E=V\oplus V^\perp.$$

On appelle projection orthogonale sur V et on note P_V la projection sur V parallèlement à $V^\perp$.

Remarque(s) 137 : 1. On peut, comme dans le cas général, parler de la symétrie orthogonale par rapport à V $s=\mathrm{Id}_E-2\,p_{V^\perp}$ associée au projecteur $p_{V^\perp}$.

2. Tout se résume sur un dessin :



3. Si un endomorphisme p vérifie $p^2 = p$, il s'agit d'un projecteur. Ce projecteur est orthogonal si et seulement si $\mathrm{Ker}(p)$ et $\mathrm{Im}(p)$ sont orthogonaux.
4. Si $e_1, e_2, \ldots, e_p$ est une base orthonormée de V alors : $\boxed{\forall x \in E, \quad p_V(x) = \sum_{k=1}^{p} \langle x, e_k \rangle . e_k .}$

Propriété(s) 12.5.95 : Soit V un sous espace vectoriel de E et $x \in E$; $y_0 = p_V(x)$ est l'unique vecteur tel que :

$$\|x - y_0\| = \min_{y \in V} \|x - y\|.$$

On appelle la distance $\|x - y_0\|$ distance de x à V et on la note $d(x, V)$.

Démonstration : Soit $y \in V$. Alors :

$$\|x - y\|^2 = \|x - y_0 + y_0 - y\|^2 = \|x - y_0\|^2 + 2 \underbrace{\langle x - y_0}_{\in V^\perp}, \underbrace{y_0 - y \rangle}_{\in V} + \|y_0 - y\|^2 \geqslant \|x - y_0\|^2.$$

■

Exemple(s) 197 :

197.1 La distance du vecteur $\vec{x} = (1, 1, 1, 1)$ au sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ d'équations :

$$\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x + 2\,y + 2\,z + t = 0 \end{cases}$$

est (en utilisant l'exemple précédent) : $d(\vec{x}, V) = \|\vec{x} - p_V(\vec{x})\| = 2$.

Chapitre 13

Variables aléatoires sur un univers fini

13.1 Définition, premiers exemples

Définition 13.1.83 : *Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et E un ensemble. Une variable aléatoire sur Ω est une fonction $X : \Omega \to E$. Si $E \subset \mathbb{R}$, on dit qu'il s'agit d'une variable aléatoire réelle.*

Définition 13.1.84 : *Soit X une variable aléatoire et A une partie de E. On note*

$$\{X \in A\} = X^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega, \quad X(\omega) \in A\}.$$

De plus, on note $\{X = a\} = \{X \in \{a\}\}$ et si X est un variable aléatoire réelle et $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\{X \leqslant \alpha\} = \{X \in]-\infty, \alpha]\}.$$

Remarque(s) 138 : On vérifie facilement que :

$$\{X \in A \cup B\} = \{X \in A\} \cup \{X \in B\} \quad \text{et} \quad \{X \in A \cap B\} = \{X \in A\} \cap \{X \in B\}$$

de plus si f est une fonction définie sur $X(\Omega)$ et à valeurs dans F, pour tout sous-ensemble C de F :

$$\{ \underbrace{f \circ X}_{\text{noté } f(X)} \in C\} = \{X \in \{f \in C\}\}.$$

Propriété(s) 13.1.96 : Soit X une variable aléatoire sur Ω valeurs dans E, un ensemble fini. L'application :

$$\mathbb{P}_X : \begin{cases} \mathcal{P}(E) & \longrightarrow [0,1] \\ A & \longmapsto \mathbb{P}(X \in A) \end{cases}$$

est une probabilité sur E. On l'appelle loi de la variable aléatoire X.

Démonstration :

1. Comme $\mathbb{P}$ est à valeurs dans $[0,1]$, $\mathbb{P}_X$ aussi.
2. $\mathbb{P}_X(E) = \mathbb{P}(X \in E) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$
3. si A et B sont deux évènements incompatibles de E, alors :

$$\{X \in A \cup B\} = \{X \in A\} \cup \{X \in B\}$$

et ces deux évènements sont incompatibles (dans Ω). Donc :

$$\mathbb{P}_X(A \cup B) = \mathbb{P}(X \in A \cup B) = \mathbb{P}(X \in A) + \mathbb{P}(X \in B) = \mathbb{P}_X(A) + \mathbb{P}_X(B).$$

■

Remarque(s) 139 : 1. Si deux variables aléatoires X et Y vérifient $\mathbb{P}_X = \mathbb{P}_Y$ on dit qu'elles ont les mêmes lois et on note $X \sim Y$.

2. Attention ! L'égalité des lois ne signifie pas celle des variables aléatoires. Par exemple si l'on lance une pièce équilibrée la v.a.r. X qui vaut 1 si l'on obtient un « pile » et 0 sinon a la même loi que la v.a.r. Y qui vaut 1 si l'on obtient un « face » et 0 sinon.

3. Si $X \sim Y$ alors (si ces fonctions existent) $f(X) \sim f(Y)$.

Démonstration : Supposons f à valeurs dans F et soit C un sous-ensemble de F. Alors :

$$\mathbb{P}_{f(X)}(C) = \mathbb{P}(f(X) \in C) = \mathbb{P}(X \in \{f \in C\}) = \mathbb{P}_X(f \in C)$$

mais alors, comme $X \sim Y$ puis par le même calcul « à l'envers » :

$$\mathbb{P}_{f(X)}(C) = \mathbb{P}_X(f \in C) = \mathbb{P}_Y(f \in C) = \mathbb{P}_{f(Y)}(C)$$

d'où $f(X) \sim f(Y)$.

■

Dans la suite, c'est plus la loi d'une variable aléatoire que la fonction elle-même qui nous intéressera. Dans ce cas, la probabilité $\mathbb{P}_X$ est définie par la distribution de probabilités $(P(X = i))_{i \in X(\Omega)}$. On la représentera souvent sous la forme d'un tableau.

Exemple(s) 198 :

198.1 Un joueur mise sur les « impairs » d'une roulette française. Si le résultat est impair, il gagne 1, sinon, il perd 1. La variable aléatoire Y qui modélise ses gains admet pour loi

$Y(\Omega)$	-1	1
$\mathbb{P}(Y = i)$	$19/37$	$18/37$

198.2 Le tableau suivant définit par exemple la loi d'une variable aléatoire réelle D modélisant la valeur obtenue en jetant un dé « pipé » à 6 faces :

$D(\Omega)$	1	2	3	4	5	6
$\mathbb{P}(D = i)$	$1/10$	$1/10$	$1/10$	$1/10$	$1/10$	$\star$

Notez que, pour obtenir une probabilité il est nécessaire que $\star = 1 - 5/10 = 1/2$.

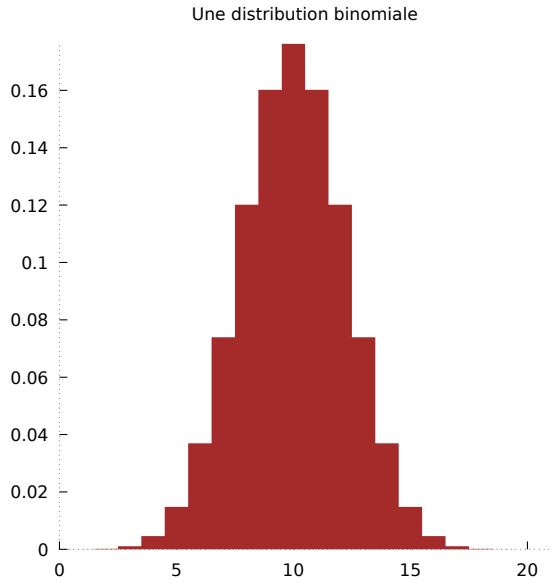
Les exemples de variables aléatoires suivants sont essentiels :

Nom	$X(\Omega)$	Notation	Loi	Modélisation
Uniforme	E	$U \sim \mathcal{U}(E)$	$\mathbb{P}(U = x) = 1/\lvert E\rvert$	Une expérience équiprobable
Bernoulli	$\{0, 1\}$	$T \sim \mathcal{B}(p)$, $p \in [0, 1]$	$\mathbb{P}(T = 1) = p, \mathbb{P}(T = 0) = 1 - p$	Obtenir « pile » en lançant une pièce « pipée » Ou « succès d'une expérience aléatoire ».
Binomiale	$[\![0, n]\!]$	$B \sim \mathcal{B}(n, p)$, $p \in [0, 1]$	$\mathbb{P}(B = i) = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$	Le nombre de « pile » obtenus en lançant n pièces « pipées »

Remarque(s) 140 : Remarquons qu'il est légitime de définir la loi binomiale avec ces formules car :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k \times (1-p)^{n-k} = (p + (1-p))^n = 1.$$

En particulier, une loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$ est une loi binomiale $\mathcal{B}(1, p)$.



Exemple(s) 199 :

199.1 La variable aléatoire qui donne le numéro d'une boule tirée dans une urne contenant n boules numérotées a pour loi $\mathcal{U}(n)$,

199.2 la variable aléatoire qui associe à un jet de dé pair 1 et à un jet de dé impair 0 suit une loi $\mathcal{B}\left(\frac{1}{2}\right)$,

199.3 on joue n fois les « impairs » à la roulette française et on compte le nombre de fois que l'on a gagné. La variable aléatoire qui modélise cette situation suit une loi $\mathcal{B}(n, 18/37)$,

199.4 lorsqu'on tire une carte dans un jeu de 32 cartes, la variable aléatoire qui associe à la carte tirée sa hauteur est une loi uniforme sur $\{7, 8, 9, 10, V, D, R, A\}$.

199.5 si l'on tire une carte dans un jeu de 32 cartes, la variable aléatoire qui associe 1 à une carte de hauteur supérieure ou égale à 10 et 0 sinon suit une loi $\mathcal{B}(5/3)$.

199.6 Des étudiants passent un DS qui a 20 questions, notées chacune sur 1. Pour chaque question, l'étudiant a une probabilité $1/2$ de réussir à répondre. La distribution des notes suivra donc une loi $\mathcal{B}(10, 1/2)$.

199.7 Toutes les variables aléatoires $\mathbf{1}_A$ suivent des lois de Bernoulli $\mathcal{B}(\mathbb{P}(A))$.

13.2 Espérance d'une variable aléatoire

Définition 13.2.85 : *Soit X une variable aléatoire réelle. On appelle espérance de X et on note $\mathbb{E}(X)$ la quantité :*

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x \times \mathbb{P}(X = x).$$

Remarque(s) 141 :

1. Remarquez que comme Ω est fini, la somme qui apparaît est finie.
2. L'espérance ne dépend que de la loi de la variable aléatoire : si $X \sim Y$ alors $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y)$.
3. Il s'agit d'une moyenne pondérée des valeurs de la variable aléatoire réelle X par leurs probabilités. Il est donc bon de la voir comme le « résultat moyen » de l'expérience aléatoire modélisée par X. On parle alors **d'indicateur de position** : en probabilité, la moitié des issues sont plus grandes que l'espérance et l'autre moitié plus petites.
4. Si l'espérance d'une variable aléatoire est nulle, on dit qu'elle est **centrée**.

Exemple(s) 200 :

200.1 Avec les exemples précédents,

$$\mathbb{E}(Y) = (-1) \times \frac{19}{37} + \frac{18}{37} = -\frac{1}{37} \quad \mathbb{E}(D) = \frac{1+2+3+4+5}{10} + \frac{6}{2} = 4,5.$$

Dans le premier cas, le joueur perdra donc $-1/37$ de sa mise en moyenne à chaque partie. Dans le deuxième, le dé « pipé » donnera une valeur moyenne de $4,5$.

200.2 Un cas essentiel est celui des variables aléatoires constantes : $Z = a$ ($a \in \mathbb{R}$). On a :

$$\mathbb{E}(a) = \mathbb{E}(Z) = a \times \mathbb{P}(Z = a) = a.$$

200.3 Un autre cas important est celui des indicatrices d'ensembles 1_A. on a :

$$\mathbb{E}(1_A) = 1 \times \mathbb{P}(A) + 0 \times \mathbb{P}(\bar{A}) = \mathbb{P}(A).$$

200.4 Soit $U \sim \mathcal{U}(n)$. Alors : $\mathbb{E}(U) = \frac{n+1}{2}$.

Démonstration : On a : $\mathbb{E}(U) = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} = \frac{n+1}{2}$. ■

200.5 Soit $T \sim \mathcal{B}(p)$. Alors : $\boxed{\mathbb{E}(T) = p}$.

Démonstration : On a : $\mathbb{E}(T) = 1 \times p + 0 \times (1-p)$. ■

200.6 Soit $B \sim \mathcal{B}(n,p)$. Alors : $\boxed{\mathbb{E}(B) = n\,p.}$

Démonstration :

$$\mathbb{E}(B) = \sum_{k=0}^{n} k \times \binom{n}{k} p^k \times (1-p)^{n-k} = n \times p \times \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} p^{k-1} \times (1-p)^{n-1-(k-1)}$$

$$= n \times p \times \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} p^k \times (1-p)^{n-1-k} = n \times p \times (p + (1-p))^{n-1} = n \times p.$$

■

Propriété(s) 13.2.97 : Soit X et Y sont deux variables aléatoires réelles définies sur Ω et $\lambda \in \mathbb{R}$:

1. l'espérance est linéaire : $\mathbb{E}(X+Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$, $\mathbb{E}(\lambda \times X) = \lambda \times \mathbb{E}(X)$,
2. elle est croissante : si $X \leqslant Y$ (comme fonctions) alors $\mathbb{E}(X) \leqslant \mathbb{E}(Y)$.

Démonstration : Toutes ces propriétés sont des conséquences immédiates de la reformulation en terme d'événements élémentaires :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x\,\mathbb{P}(X = x) = \sum_{x \in X(\Omega)} \sum_{\omega \in \{X=x\}} \underbrace{x}_{=X(\omega)} \mathbb{P}(\{\omega\}) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)\,\mathbb{P}(\{\omega\}).$$

■

Propriété(s) 13.2.98 : (théorème de transfert) Si $X : \Omega \to E$ une variable aléatoire et $f : E \to \mathbb{R}$. Alors :

$$\mathbb{E}(f(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x) \times \mathbb{P}(X = x).$$

Démonstration : Par la formule de la propriété précédente :

$$\mathbb{E}(f(X)) = \sum_{\omega\in\Omega} f(X(\omega))\,\mathbb{P}(\{\omega\}) = \sum_{x\in X(\Omega)}\sum_{\omega\in\{X=x\}} f(x)\,\mathbb{P}(\{\omega\}) = \sum_{x\in X(\Omega)} f(x)\,\mathbb{P}(X=x).$$

■

Remarque(s) 142 : Un cas particulier très important de cette formule est la suivant : si X et Y sont deux v.a. et f une fonction définie sur $X(\Omega)\times Y(\Omega)$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ alors $f(X,Y)$ est une v.a.r. et

$$\boxed{\mathbb{E}(f(X,Y)) = \sum_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} f(x,y)\,\mathbb{P}((X,Y)=(x,y)).}$$

13.3 Variance d'une variable aléatoire

Définition 13.3.86 : *Soit X un variable aléatoire réelle. On appelle variance de X la quantité :*

$$\mathbb{V}(X) = \mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}((X-\mathbb{E}(X))^2),$$

et on appelle écart type de la variable aléatoire X la quantité :

$$\sigma(X) = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}.$$

Remarque(s) 143 :
1. La variance quantifie l'écart à la moyenne pondérée. En d'autres termes, il s'agit d'un indicateur de dispersion.
2. Elle est toujours positive par croissance de l'espérance, ce qui justifie la définition de l'écart-type.
3. Une v.a. de variance égale à 1 est dite réduite.

Propriété(s) 13.3.99 : Soit X une variable aléatoire réelle. Alors :
1. $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$ (formule de König-Huygens)
2. Si $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, $\mathrm{Var}(a\,X+b) = a^2\,\mathrm{Var}(X)$.

Démonstration : Par la linéarité de l'espérance :

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2 - 2\,\mathbb{E}(X)\times X + \mathbb{E}(X)^2) = \mathbb{E}(X^2) - 2\,\mathbb{E}(X)\times\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(X)^2 = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2.$$

Pour le deuxième point, on remarque que, par linéarité de l'espérance : $\mathbb{E}(a\,X+b) = a\,\mathbb{E}(X)+b$. Donc :

$$\mathrm{Var}(a\,X+b) = \mathbb{E}((a\,X+b-(a\,\mathbb{E}(X)+b))^2) = a^2\,\mathbb{E}((X-\mathbb{E}(X))^2) = a^2\,\mathrm{Var}(X).$$

■

Exemple(s) 201 :

201.1 Pour le deuxième exemple du paragraphe, on a :

$$\mathrm{Var}(Y) = \mathbb{E}(Y^2) - \mathbb{E}(Y)^2 = 1 - \frac{1}{37^2}.$$

201.2 Soit $U\sim\mathcal{U}(n)$. Alors : $\mathrm{Var}(U) = \frac{n^2-1}{12}$.

Démonstration : Par le théorème de transfert :

$$\mathbb{E}(U^2) = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Donc :

$$\mathrm{Var}(U) = \mathbb{E}(U^2) - \mathbb{E}(U)^2 = \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{(n+1)^2}{4} = \frac{n^2-1}{12}.$$

■

201.3 Soit $T \sim \mathcal{B}(p)$. Alors, $\boxed{\mathrm{Var}(T) = p(1-p).}$

Démonstration : En effet, par le théorème de transfert : $\mathbb{E}(T^2) = 1^2\, p + 0^2\,(1-p) = p$ donc :

$$\mathrm{Var}(T) = \mathbb{E}(T^2) - \mathbb{E}(T)^2 = p - p^2 = p(1-p).$$

■

201.4 Soit $B \sim \mathcal{B}(n,p)$. Alors : $\boxed{\mathrm{Var}(B) = n\,p\,(1-p)}$.

Démonstration : Par le théorème de transfert, on a :

$$\mathbb{E}(B^2 - B) = n(n-1) \sum_{k=2}^{n} \binom{n-2}{k-2} p^k (1-p)^{n-k} = n(n-1)\,p^2.$$

Donc par la formule de Huygens :

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2 - X) + \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(X)^2 = n(n-1)\,p^2 + n\,p - n^2\,p^2 = n\,p\,(1-p).$$

■

Propriété(s) 13.3.100 : Soit X une v.a.r. de variance non nulle. Alors :

$$Y = \frac{X - \mathbb{E}(X)}{\sigma(X)}$$

est centrée, réduite.

Démonstration : On a :

$$\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{\sigma(X)}\,\mathbb{E}(X - \mathbb{E}(X)) = \frac{1}{\sigma(X)}\,\mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(\mathbb{E}(X))) = 0$$

de plus :

$$\mathrm{Var}(Y) = \frac{1}{\sigma^2(X)}\,\mathrm{Var}(X) = 1.$$

■

Propriété(s) 13.3.101 : (formules de Markov et Bienaymé-Tchebichev) Soit X une variable aléatoire réelle d'espérance m et de variance σ^2.

1. (inégalité de Markov) Si X est positive et $a > 0$ alors : $\mathbb{P}(X \geqslant a) \leqslant \frac{m}{a}$.
2. (inégalité de Bienaymé-Tchebichev) Si $\alpha > 0$ alors : $\mathbb{P}(|X - m| \geqslant \alpha) \leqslant \frac{\sigma^2}{\alpha^2}$.

Démonstration : On a, comme X est positive :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x \times \mathbb{P}(X = x) \geqslant \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ x \geqslant a}} x \times \mathbb{P}(X = x) \geqslant a \times \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ x \geqslant a}} \mathbb{P}(X = x) = a \times \mathbb{P}(X \geqslant a).$$

Pour l'inégalité de Bienaymé-Tchebichev, on remarque qu'il est légitime d'appliquer l'inégalité de Markov à la variable aléatoire positive $(X-m)^2$ donc :

$$\mathbb{P}(|X - m| \geqslant \alpha) = \mathbb{P}((X-m)^2 \geqslant \alpha^2) \leqslant \frac{\mathbb{E}((X-m)^2)}{\alpha^2} = \frac{\sigma^2}{\alpha^2}.$$

■

Exemple(s) 202 :

202.1 On jette une pièce 1000 fois. Celle-ci tombe 600 fois sur « pile ». Est-elle équilibrée ?

Démonstration : On note X la v.a.r. comptant le nombre de « pile » obtenus en lançant 1000 fois une pièce équilibrée. Alors $X \sim \mathcal{B}(1000, 1/2)$ donc $m = \mathbb{E}(X) = 500$ et $\sigma^2 = \mathrm{Var}(X) = 250$. Donc par la formule de Bienaymé-Tchebichev :

$$\mathbb{P}(X = 600) \leqslant \mathbb{P}(|X - 500| \geqslant 100) \leqslant \frac{250}{(100)^2} = 2,5\%.$$

La probabilité que la pièce est équilibrée est donc inférieure ou égale à $2,5\%$.

■

13.4 Couples de variables aléatoires

On considère maintenant deux variables aléatoires X et Y définies sur Ω. Le couple de variables aléatoires (X, Y) est alors une variable aléatoire, dont on appelle la loi **loi conjointe** et celles de X et Y les **lois marginales**. Pour déterminer sa loi, on peut faire un tableau :

$Y(\Omega)$ \ $X(\Omega)$	$X = x_1$	$\cdots$	$X = x_i$	$\cdots$	$X = x_n$	
$Y = y_1$	$\mathbb{P}((X,Y) = (x_1, y_1))$	$\cdots$	$\mathbb{P}((X,Y) = (x_i, y_1))$	$\cdots$	$\mathbb{P}((X,Y) = (x_n, y_1))$	$\mathbb{P}(Y = y_1)$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
$Y = y_j$	$\mathbb{P}((X,Y) = (x_1, y_j))$	$\cdots$	$\mathbb{P}((X,Y) = (x_i, y_j))$	$\cdots$	$\mathbb{P}((X,Y) = (x_n, y_j))$	$\mathbb{P}(Y = y_j)$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
$Y = y_m$	$\mathbb{P}((X,Y) = (x_1, y_m))$	$\cdots$	$\mathbb{P}((X,Y) = (x_i, y_m))$	$\cdots$	$\mathbb{P}((X,Y) = (x_n, y_m))$	$\mathbb{P}(Y = y_m)$
	$\mathbb{P}(X = x_1)$	$\cdots$	$\mathbb{P}(X = x_i)$	$\cdots$	$\mathbb{P}(X = x_n)$	

Faisons quelques remarques liées à ce tableau :

1. la connaissance de la loi de (X, Y) détermine celle des lois marginales de X et Y. Plus précisément :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad \mathbb{P}(X = x_i) = \sum_{j=1}^{m} \mathbb{P}((X,Y) = (x_i, y_j)), \qquad \forall j \in [\![1, m]\!], \quad \mathbb{P}(Y = y_j) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}((X,Y) = (x_i, y_j)).$$

2. la réciproque est fausse : connaître les sommes des lignes et des colonnes d'un tableau ne détermine pas ce tableau !

Exemple(s) 203 :

203.1 Si $X \sim \mathcal{B}\left(\frac{1}{2}\right)$ et $Y \sim \mathcal{B}\left(\frac{1}{2}\right)$. Le couple (X, Y) peut avoir pour loi :

$Y(\Omega)$ \ $X(\Omega)$	$X = 0$	$X = 1$	
$Y = 0$	1/4	1/4	1/2
$Y = 1$	1/4	1/4	1/2
	1/2	1/2	

$Y(\Omega)$ \ $X(\Omega)$	$X = 0$	$X = 1$	
$Y = 0$	1/2	0	1/2
$Y = 1$	0	1/2	1/2
	1/2	1/2	

3. chaque ligne/colonne détermine une probabilité, à condition qu'elle n'est pas constituée de 0, que l'on appelle loi conditionnelle sachant $X = x_i$ (en colonnes) ou sachant $Y = y_j$ (en ligne). Plus généralement, si A est un évènement de probabilité non nulle et X une variable aléatoire à valeurs dans E, on appelle loi de X sachant A la probabilité définie par :

$$\forall B \in \mathcal{P}(E), \quad \mathbb{P}(X \in B|A) = \mathbb{P}(\{X \in B\}|A)$$

13.5 Indépendance de variables aléatoires

13.5.1 Le cas de deux variables aléatoires

Définition 13.5.87 : *Soit X et Y deux variables aléatoires. On dit que X et Y sont indépendantes si pour tout $A \subset X(\Omega)$ et $B \subset Y(\Omega)$ les évènements $\{X \in A\}$ et $\{Y \in B\}$ sont indépendants, c'est-à-dire :*

$$\mathbb{P}((X,Y) \in A \times B) = \mathbb{P}(X \in A) \times \mathbb{P}(Y \in B).$$

Remarque(s) 144 :

1. On note alors $X \perp\!\!\!\perp Y$.
2. En particulier, comme les évènements élémentaires suffisent pour définir une probabilité, X et Y sont indépendantes si et seulement si pour tout $(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$,

$$\mathbb{P}(X = x, Y = y) = \mathbb{P}((X,Y) = (x,y)) = \mathbb{P}(X = x) \times \mathbb{P}(Y = y).$$

Démonstration : Pour le sens direct, il suffit de prendre les évènements élémentaires $A = \{a\}$ et $B = \{b\}$. Pour la réciproque, si la propriété d'indépendance est vraie pour tous évènements élémentaires, on a :

$$\mathbb{P}(X \in A) \times \mathbb{P}(Y \in B) = \sum_{x \in A} \mathbb{P}(X = x) \times \sum_{y \in B} \mathbb{P}(Y = y) = \sum_{(x,y) \in A \times B} \mathbb{P}((X,Y) = (x,y)) = \mathbb{P}((X,Y) \in A \times B).$$

■

Exemple(s) 204 :

204.1 Reprenons les exemples du paragraphe précédent. Si l'on considère les couples (X,Y) de lois :

$Y(\Omega)$ \ $X(\Omega)$	$X=0$	$X=1$	
$Y=0$	1/4	1/4	1/2
$Y=1$	1/4	1/4	1/2
	1/2	1/2	

$Y(\Omega)$ \ $X(\Omega)$	$X=0$	$X=1$	
$Y=0$	1/2	0	1/2
$Y=1$	0	1/2	1/2
	1/2	1/2	

alors le premier couple est indépendant alors que le deuxième ne l'est pas.

204.2 Bien souvent, l'indépendance est implicitement donnée par l'énoncé. Par exemple « on lance deux pièces » donne deux variables aléatoires : celle qui modélise le premier lancer et celle qui modélise le deuxième, qui sont indépendantes. Attention cependant aux énoncés du type : « on lance une pièce et dépendant du premier résultat, on en lance une deuxième » qui, eux, donnent des variables aléatoires non indépendantes.

Propriété(s) 13.5.102 : Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes définies sur Ω. Soit f une fonction définie sur $X(\Omega)$ et g une fonction définie sur $Y(\Omega)$. Alors

$$f(X) \quad \text{et} \quad g(Y) \quad \text{sont indépendantes.}$$

Démonstration : Soit $(x,y) \in f(X(\Omega)) \times g(Y(\Omega))$. On a :

$$\mathbb{P}((f(X), g(Y)) = (x,y)) = \mathbb{P}((X,Y) \in \{f = x\} \times \{g = y\})$$

donc comme X et Y sont indépendantes :

$$= \mathbb{P}(X \in \{f = x\})\, \mathbb{P}(Y \in \{g = y\}) = \mathbb{P}(f(X) = x)\, \mathbb{P}(g(Y) = y).$$

■

Propriété(s) 13.5.103 : Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes. Alors :

$$\mathbb{E}(X\,Y) = \mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(Y).$$

Démonstration : On a, par le théorème de transfert :

$$\mathbb{E}(X\,Y) = \sum_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} x\,y\,\mathbb{P}((X,Y)=(x,y))$$

donc par indépendance de X et Y :

$$= \sum_{(x,y)\in X(\Omega)\,Y(\Omega)} x\,y \times \mathbb{P}(X=x)\,\mathbb{P}(Y=y) = \sum_{x\in X(\Omega)} x\,\mathbb{P}(X=x) \sum_{y\in Y(\Omega)} y\,\mathbb{P}(X=y) = \mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(Y).$$

■

Définition 13.5.88 : *Pour X et Y deux variables aléatoires, on pose :*

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}((X-\mathbb{E}(X))\,(Y-\mathbb{E}(Y))).$$

Propriété(s) 13.5.104 :

1. On a :
$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}(X\,Y) - \mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(Y).$$
2. En particulier, X et Y sont indépendantes, alors :
$$\mathrm{Cov}(X,Y) = 0.$$
3. Enfin :
$$\mathrm{Var}(X+Y) = \mathrm{Var}(X) + 2\,\mathrm{Cov}(X,Y) + \mathrm{Var}(Y)$$
Donc si X et Y sont indépendantes (ou plus généralement si $\mathrm{Cov}(X,Y)=0$),
$$\boxed{\mathrm{Var}(X+Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y).}$$

Remarque(s) 145 : Plus généralement, si $\mathrm{Cov}(X,Y)=0$, on parle de variables aléatoires **décorrélées**. Comme nous l'avons vu, les variables indépendantes sont décorrélées mais la réciproque n'est pas vraie : si l'on considère le couple de variables aléatoires (X,Y) dont la loi conjointe est définie par la table :

$Y(\Omega)$ \ $X(\Omega)$	$X=-1$	$X=0$	$X=1$	
$Y=-1$	1/6	0	1/6	1/3
$Y=0$	0	1/3	0	1/3
$Y=1$	1/6	0	1/6	1/3
	1/3	1/3	1/3	

Alors X et Y ne sont clairement pas indépendantes, mais $\mathbb{E}(X)=\mathbb{E}(Y)=\mathbb{E}(X\times Y)=0$.

13.5.2 Indépendance mutuelle

Définition 13.5.89 : *Soit $X_1, X_2, \ldots, X_n$ n variables aléatoires définis sur Ω. On dit qu'elles sont mutuellement indépendantes si pour tous évènements $A_i \subset X_i(\Omega)$ ($i \in [\![1,n]\!]$) :*

$$\mathbb{P}((X_1,X_2,\ldots,X_n)\in A_1\times A_2\times\cdots\times A_n) = \prod_{i=1}^{n}\mathbb{P}(X_i\in A_i).$$

Remarque(s) 146 : 1. Bien entendu, si n variables aléatoires sont mutuellement indépendantes, elles le sont deux à deux. Comme dans le cas des évènement, la réciproque est malheureusement fausse.

2. Par définition, toute sous-famille d'une famille de variables aléatoires indépendantes est indépendante.
3. (**Lemme des coalitions**). Comme dans le cas de deux variables aléatoires, si f et g sont deux fonctions idoines, $f(X_1, \dots, X_p)$ est indépendante de $g(X_{p+1}, \dots, X_n)$. Ce résultat se généralise facilement à plus de deux coalitions.

Exemple(s) 205 :

205.1 On considère $X_1, X_2, \dots, X_n$ n variables aléatoires indépendantes suivant des lois $\mathcal{B}(p)$. Alors :

$$Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_n \sim \mathcal{B}(n, p).$$

Démonstration : On procède par récurrence sur n. Le résultat est clair si $n = 1$. Supposons-le vrai pour $n \in \mathbb{N}$ fixé. Considérons $X_1, X_2, \dots, X_n, X_{n+1}$ $n+1$ variables aléatoires indépendantes suivant des lois $\mathcal{B}(p)$. Alors par hypothèse de récurrence :

$$Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_n \sim \mathcal{B}(n, p) \quad \text{et} \quad X_{n+1} \sim \mathcal{B}(p).$$

Donc par indépendance puis la formule du triangle de Pascal :

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \quad \mathbb{P}(Y + X_{n+1} = k) = \mathbb{P}((Y = k \cap X_{n+1} = 0) \cup (Y = k-1 \cap X_{n+1} = 1))$$

$$= \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k+1} + \binom{n}{k-1} p^k (1-p)^{n-k+1} = \binom{n+1}{k} p^k (1-p)^{n-k+1}$$

enfin, toujours par indépendance :

$$\mathbb{P}(Y + X_{n+1} = 0) = \mathbb{P}(Y = 0 \cap X_{n+1} = 0) = (1-p)^{n+1} \quad \mathbb{P}(Y + X_{n+1} = n+1) = \mathbb{P}(Y = n \cap X_{n+1} = 1) = p^{n+1}$$

ce qui achève de montrer l'hérédité.

■

Il est aussi aisé de voir le résultat à l'aide de la modélisation suivante : lancer n pièces pipées une fois et compter le nombre de « pile » revient à lancer une pièce pipée n fois indépendamment et compter le nombre de « pile ».

Chapitre 14

Séries numériques

14.1 Généralités sur les séries

Définition 14.1.90 : *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle ou complexe. On dit que la série de terme général u_n $\sum u_n$ converge si la suite des sommes partielles :*

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

converge[1]*. Dans ce cas, on note :*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

Si elle ne converge pas, on dit que la série diverge.

Exemple(s) 206 :

206.1 Soit $q \in \mathbb{C}$. La série de terme général $u_n = q^n$ converge si $|q| < 1$. En effet :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{1-q}.$$

206.2 Cependant, la série $\sum(-1)^n$ ne converge pas. En effet,

$$S_{2\,n} = \sum_{k=0}^{2\,n}(-1)^k = 1 \quad \text{et} \quad S_{2\,n+1} = \sum_{k=0}^{2\,n+1}(-1)^k = 0$$

donc les suites extraites $(S_{2\,n})$ et $(S_{2\,n+1})$ n'admettent pas la même limite lorsque n tend vers $+\infty$.

Remarque(s) 147 : Dans le cas où la série $\sum u_n$ converge, on appelle suite des restes :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad R_n = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k - \sum_{k=0}^{n} u_n \underset{Not.}{=} \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k.$$

Propriété(s) 14.1.105 : Si $\sum u_n$ converge, alors : $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Démonstration : Il suffit de remarquer que : $u_n = S_n - S_{n-1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

1. c'est-à-dire admet une limite finie

■

Remarque(s) 148 : C'est surtout la contraposée que nous utiliserons en pratique. Si le terme général de la série ne tend pas vers 0, elle ne converge pas. On dit qu'elle **diverge grossièrement**.

Exemple(s) 207 :

207.1 La série $\sum n$ diverge grossièrement.

207.2 Si $|q| \geqslant 1$, la série $\sum q^n$ diverge grossièrement. Ceci inclut l'exemple de la série $\sum(-1)^n$.

207.3 Attention, certaines séries divergent bien qu'elles ne divergent pas grossièrement, comme le montre l'exemple (déjà traité) de la série $\sum \frac{1}{n}$. Notez cependant que l'idée pour montrer que cette série diverge est similaire, puisqu'on utilise que :

$$S_{2\,n} - S_n = \sum_{k=n+1}^{2\,n} \frac{1}{k} \geqslant \sum_{k=n+1}^{2\,n} \frac{1}{2\,n} = \frac{1}{2}.$$

Propriété(s) 14.1.106 : Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries convergentes. Alors $\sum(u_n + v_n)$ converge et :

$$\sum_{k=0}^{+\infty}(u_k + v_k) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k + \sum_{k=0}^{+\infty} v_k.$$

De même, si λ est un scalaire, $\sum \lambda \times u_n$ converge et :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \lambda \times u_k = \lambda \times \sum_{k=0}^{+\infty} u_k.$$

Démonstration : Il suffit de remarquer que les deux identités sont vraies pour les sommes partielles puis de passer à la limite.

■

Remarque(s) 149 : Faites très attention ; le plus important et de retenir qu'il faut réfléchir avant de « séparer » une somme pour éviter de dire des bêtises ; dans le doute, écrivez toujours les sommes partielles.

14.2 Séries à termes positifs

Il est particulièrement facile de montrer que des séries à termes converge. En effet :

Propriété(s) 14.2.107 : Soit $\sum u_n$ une série à terme général positif. Alors $\sum u_n$ converge si et seulement si la suite de ses sommes partielles est majorée.

Démonstration : Concernant le sens direct, on remarque que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad S_{n+1} - S_n = u_{n+1} \geqslant 0$$

la suite des sommes partielles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc croissante, si elle est majorée, elle converge donc.
La réciproque est vraie car une suite convergente est bornée donc majorée.

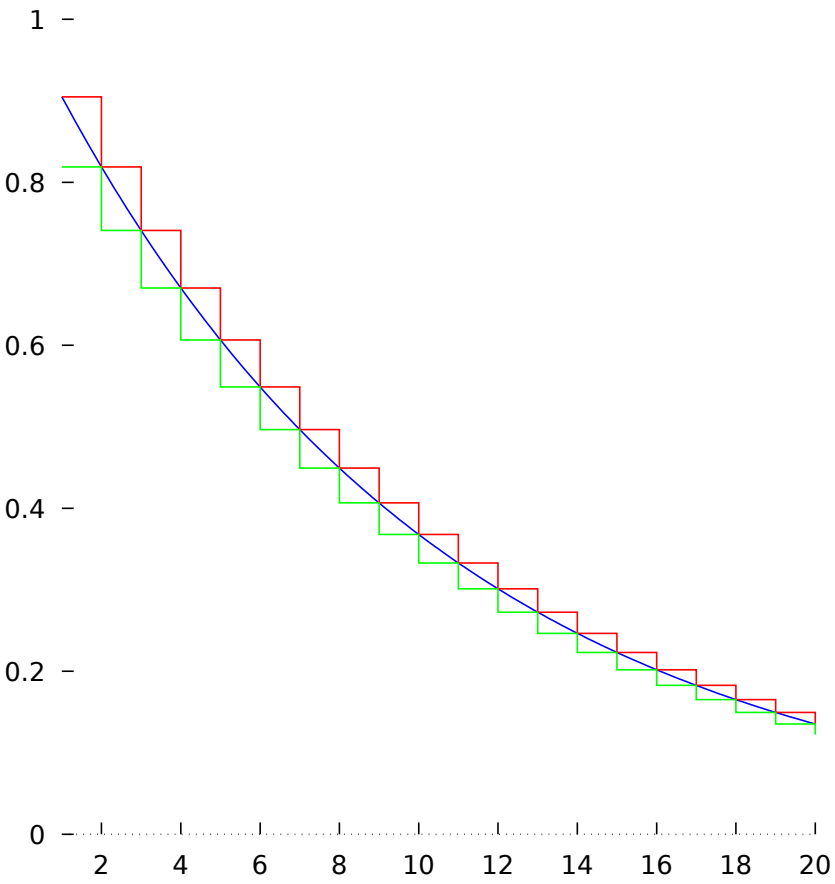
■

Remarque(s) 150 : en conséquence, si $\sum u_n$ est une série à termes positifs divergente, on note :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = +\infty.$$

14.2.1 Méthode intégrale, séries de Riemann

Dans le cas où le terme général de la série est de la forme $f(n)$ avec f positive, continue et décroissante sur $[n_0, +\infty[$, il est possible de comparer les sommes partielles de la série $\sum f(n)$ (pour $n \geqslant n_0$) à des intégrales de f. Tout est résumé par un dessin :



En effet, comme f est décroissante, pour tout $n \geqslant n_0$:

$$\forall x \in [n, n+1], \quad f(n+1) \leqslant f(x) \leqslant f(n)$$

donc par croissance de l'intégrale :

$$f(n+1) = \int_n^{n+1} f(n+1)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_n^{n+1} f(n)\,\mathrm{d}t = f(n).$$

Puis, par la relation de Chasles :

$$\boxed{S_{n+1} - f(n_0) = \sum_{k=n_0}^{n} f(k+1) \leqslant \int_{n_0}^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=n_0}^{n} f(k) = S_n.}$$

Ces relations impliquent en particulier :

Proposition 14.2.17 : *(séries de Riemann) Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. La série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.*

Démonstration : Supposons que $\alpha > 1$. Alors le fonction $f(t) = \frac{1}{t^\alpha}$ est décroissante sur $[1, +\infty[$ donc :

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^\alpha} - 1 \leqslant \int_1^{n+1} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_{t=1}^{t=n+1} = \frac{1-(n+1)^{1-\alpha}}{\alpha-1} \leqslant \frac{1}{\alpha-1}$$

La suite des sommes partielles de cette série à termes positifs étant majorée, elle converge donc.
De même, si $\alpha \leqslant 1$, on a de même, par croissance de l'intégrale :

$$\ln(n+1) - \ln(2) = \int_1^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leqslant \int_1^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}.$$

Par théorème de comparaison, la suite des sommes partielles de la série tend vers $+\infty$. Elle ne converge donc pas. ■

Exemple(s) 208 :

208.1 Étudions la convergence de la série $\sum \frac{1}{n\times\ln(n)}$. On a, pour tout $n \geqslant 2$:

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\times\ln(k)} - \frac{1}{2\ln(2)} \geqslant \int_2^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t\times\ln(t)} = [\ln(\ln(t))]_{t=2}^{t=n+1} = \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(2)).$$

Les sommes partielles de la série tendent donc vers $+\infty$, elle ne converge donc pas.

14.2.2 Théorèmes de comparaison.

Nous disposons maintenant de deux types de séries « de référence » : les séries géométriques et les séries de Riemann, auxquelles nous allons comparer les autres séries pour en étudier la convergence. Commençons par un cas simple :

Propriété(s) 14.2.108 : Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes **positifs**. On suppose que pour tout n, $u_n \leqslant v_n$. Alors si $\sum v_n$ converge, $\sum u_n$ aussi et :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} v_k.$$

Démonstration : Il suffit de remarquer que, pour tout entier naturel n, si $\sum v_n$ converge :

$$\sum_{k=0}^{n} u_k \leqslant \sum_{k=0}^{n} v_k \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} v_k.$$

Donc la suite des sommes partielles de $\sum u_n$ est bornée et puisque le terme général de la suite est positif, elle converge. L'inégalité des limites s'obtient alors pas passage à la limite. ■

Remarque(s) 151 : Bien-entendu, le résultat de convergence reste vrai si l'inégalité n'est vraie qu'à partir d'un certain rang. Attention cependant : il n'y a plus inégalité pour les sommes dans ce cas.

Exemple(s) 209 :

209.1 La série $\sum \frac{1}{n^2\times\ln^2(n)}$ converge car, pour $n \geqslant 3$: $\frac{1}{n^2\times\ln^2(n)} \leqslant \frac{1}{n^2}$ et la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^2}$ converge.

Soit (u_n) et (v_n) sont deux suites quelconques, on écrit :

$u_n = o(v_n)$ s'il existe $(\epsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui tend vers 0, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \epsilon_n \times v_n$
$u_n \sim v_n$ si $u_n = v_n + o(v_n)$
$u_n = O(v_n)$ s'il existe une constante C, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\lvert u_n\rvert \leqslant C \times \lvert v_n\rvert$

Propriété(s) 14.2.109 : Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes **positifs**. Alors :

1. Si $u_n = O(v_n)$ et $\sum v_n$ converge, $\sum u_n$ aussi.

2. Si $u_n = o(v_n)$ et $\sum v_n$ converge, $\sum u_n$ aussi.
3. Si $u_n \sim v_n$ alors $\sum v_n$ converge si et seulement si $\sum u_n$ converge.

Démonstration : Le premier point est une conséquence immédiate de la propriété précédente. Le deuxième est une conséquence du premier. Quand qu troisième, on remarque que $u_n \sim v_n$ implique $u_n = O(v_n)$ donc par le premier point la convergence de $\sum v_n$ implique celle de $\sum u_n$ et $v_n = O(u_n)$, ce qui montre de même la réciproque. ■

Exemple(s) 210 :

210.1 La série $\sum \frac{n}{n^2+1}$ diverge. En effet :

$$\frac{n}{n^2+1} \sim \frac{1}{n}$$

et la série de Riemann $\sum \frac{1}{n}$ diverge.

210.2 La série $\sum \frac{\mathrm{ch}(n)}{\mathrm{ch}(2\,n)}$ est convergente. En effet :

$$\frac{\mathrm{ch}(n)}{\mathrm{ch}(2\,n)} = \frac{e^n + e^{-n}}{e^{2\,n} + e^{-2\,n}} \sim \frac{1}{e^n}$$

et la série géométrique $\sum e^{-n}$ de raison $e^{-1} < 1$ converge.

210.3 La série $\sum \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}+1}$ diverge. En effet :

$$\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}+1} = \frac{1}{n}\exp\left(\frac{1}{n}\ln\left(\frac{1}{n}\right)\right) \sim \frac{1}{n}.$$

Et la série de Riemann $\sum \frac{1}{n}$ diverge.

210.4 Soit (u_n) et (v_n) deux suites strictement positives vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = \frac{u_n}{1+u_n}$$

montrons que $\sum u_n$ converge si et seulement si $\sum v_n$ converge.
En effet, supposons que $\sum u_n$ converge. Alors en particulier, $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $v_n \sim u_n$. Donc $\sum v_n$ converge.
Réciproquement, si $\sum v_n$ converge, alors $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, mais $u_n = \frac{v_n}{1-v_n}$ (au moins à partir d'un certain rang) donc $u_n \sim v_n$ puis $\sum u_n$ converge.

14.3 Séries à termes quelconques

Pour traiter la convergence d'une série à termes quelconques, on essaye de se ramener au cas des séries à termes positifs grâce à la notion de convergence absolue :

Définition 14.3.91 : *On dit que la série $\sum u_n$ est absolument convergente ou sommable si la série $\sum |u_n|$ est convergente.*

Remarque(s) 152 : On utilise parfois la notation $\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n| < +\infty$ pour signaler qu'une série est sommable.

Proposition 14.3.18 : *Une série absolument convergente est convergente.*

Démonstration : Traitons le cas réel. Supposons que $\sum |u_n|$ converge. On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n^+ = \max(u_n, 0) \quad \text{et} \quad u_n^- = -\min(u_n, 0).$$

Alors ces deux suites sont positives et vérifient pour tout entier naturel $u_n^+ \leqslant |u_n|$ et $u_n^- \leqslant |u_n|$. Donc comme $\sum |u_n|$ converge, $\sum u_n^+$ et $\sum u_n^-$ convergent. Enfin,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = u_n^+ - u_n^-$$

donc $\sum u_n = \sum (u_n^+ - u_n^-)$ converge.
Dans le cas complexe, on remarque que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \operatorname{Re}(u_n) + i \operatorname{Im}(u_n)$$

et que par les inégalités géométriques $|\operatorname{Re}(z)| \leqslant |z|$ et $|\operatorname{Im}(z)| \leqslant |z|$ les suites réelles $(\operatorname{Re}(u_n))$ et $(\operatorname{Im}(u_n))$ sont absolument convergentes donc convergentes.

■

Remarque(s) 153 : Attention ! La réciproque est fausse, comme le montre l'exemple de la série convergente $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ qui n'est pas absolument convergente car $\sum \frac{1}{n}$ diverge, mais convergente. En effet :

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
$$S_{2\,n} - S_{2\,n+1} = \frac{1}{2\,n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$
2. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
$$S_{2\,(n+1)} - S_{2\,n} = \frac{1}{2\,n+2} - \frac{1}{2\,n+1} \leqslant 0.$$
3. Enfin,
$$S_{2\,(n+1)+1} - S_{2\,n+1} = -\frac{1}{2\,n+3} + \frac{1}{2\,n+2} \geqslant 0.$$

Les suites $(S_{2\,n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2\,n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes. Elles convergent donc vers la même limite. Donc $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Exemple(s) 211 :

211.1 La série $\sum \frac{\sin(n)}{n^2}$ est absolument convergente. En effet :

$$\left|\frac{\sin(n)}{n^2}\right| \leqslant \frac{1}{n^2}$$

et la série $\sum \frac{1}{n^2}$ est convergente. Donc $\sum \frac{\sin(n)}{n^2}$ est convergente.

211.2 La série $\sum \frac{j^n}{n^2}$ converge absolument donc converge. En effet :

$$\left|\frac{j^n}{n^2}\right| = \frac{1}{n^2}.$$

211.3 La série $\sum u_n = \sum \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \sqrt{n} \sin\frac{1}{n}\right)$ est absolument convergente. En effet :

$$\frac{1}{\sqrt{n}} - \sqrt{n} \sin\frac{1}{n} = \frac{1}{\sqrt{n}} - \sqrt{n} \times \left(\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = o\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$$

En particulier, $|u_n| = o\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$ donc la série est absolument convergente donc convergente.

Remarque(s) 154 : Ce dernier exemple nous inspire la réflexion suivante. Si l'on cherche à établir la convergence de la suite $\sum u_n$ et qu'il existe une suite (v_n) **positive** telle que $\sum v_n$ converge et :

$$u_n = O(v_n)$$

alors $|u_n| = O(v_n)$ et donc $\sum u_n$ est absolument convergente donc convergente.

Pour étudier la convergence d'une série numérique $\sum u_n$ à termes quelconques, on peut :

1. vérifier si elle est grossièrement divergente puis,
2. analyser si elle est absolument convergente, en comparant $|u_n|$ à une série de « référence » : de Riemann ou géométrique, ou plus rarement à une intégrale
3. si elle n'est pas absolument convergente, on ne peut pas conclure directement... on peut cependant revenir aux sommes partielles et utiliser une des « astuces » suivantes :
   (a) reconnaître une somme télescopique
   (b) reconnaître un développement limité (Taylor avec reste intégral)
   (c) regrouper les termes deux à deux (séries du type $\sum(-1)^n u_n$).

Exemple(s) 212 :

212.1 Étudions, suivant les valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ la convergence de la série $\sum u_n$, où :

$$\forall n \geqslant 1, \quad u_n = \frac{1+(-1)^n n^\alpha}{n^{2\alpha}}.$$

(a) Si $\alpha \leqslant 0$, (u_n) ne tend pas vers 0 donc la série est grossièrement divergente.

(b) Analysons a convergence absolue. On a $|u_n| \sim \frac{1}{n^\alpha}$ et la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$. La série est donc absolument convergente si et seulement si $\alpha > 1$.

(c) Reste à étudier le cas $\alpha \in]0,1]$. On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{1}{n^{2\alpha}} + \frac{(-1)^n}{n^\alpha}.$$

i. La série $\sum \frac{1}{n^{2\alpha}}$ est une série de Riemann qui converge si et seulement si $\alpha \in]1/2,1]$.

ii. Montrons que la série $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ converge ; on a :

A. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$S_{2n} - S_{2n+1} = \frac{1}{(2n+1)^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

B. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$S_{2(n+1)} - S_{2n} = \frac{1}{(2n+2)^\alpha} - \frac{1}{(2n+1)^\alpha} \leqslant 0.$$

C. Enfin,

$$S_{2(n+1)+1} - S_{2n+1} = -\frac{1}{(2n+3)^\alpha} + \frac{1}{(2n+2)^\alpha} \geqslant 0.$$

Les suites $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes. Elles convergent donc vers la même limite. Donc $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

finalement la série converge dans ce cas si et seulement si $\alpha \in]1/2,1]$.

14.4 Application aux suites

Propriété(s) 14.4.110 : La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si la série $\sum(u_{n+1}-u_n)$ converge.

Démonstration : Soit $n \in \mathbb{N}$. On reconnaît dans les somme partielles une suite télescopique :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n}(u_{k+1}-u_k) = u_{n+1} - u_0$$

et la propriété est maintenant immédiate.

■

Exemple(s) 213 :

213.1 Nous allons montrer la formule de Stirling (qu'il serait bon de connaître) :

$$\boxed{n! \sim \sqrt{2\,\pi\,n}\,\left(\frac{n}{e}\right)^n.}$$

(a) Posons, pour $n \geqslant 1$: $u_n = \frac{n!\,e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}$. Pour montrer la convergence de (u_n), il suffit de montrer celle de : $(\ln(u_n))$ donc celle de la série $\sum(\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n))$. On a :

$$\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) = \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \ln\left(\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+\frac{1}{2}}\,e\right) = 1 - \left(n+\frac{1}{2}\right)\,\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

$$= 1 - \left(n+\frac{1}{2}\right)\,\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2\,n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) = O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

cette série est absolument convergente, donc convergente.

(b) On en déduit qu'il existe une constante positive C telle que :

$$n! \sim C\,\sqrt{n}\,\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

(c) Pour calculer cette constante, on considère les intégrales de Wallis : $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\,\mathrm{d}t$. On rappelle que, par intégration par parties :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}\,W_n.$$

Donc que, comme $W_0 = \frac{\pi}{2}$ et $W_1 = 1$, on montre par récurrence sur n que :

$$W_{2\,n} = \frac{(2\,n)!}{2^{2\,n}\,(n!)^2}\,\frac{\pi}{2} \quad W_{2\,n+1} = \frac{2^{2\,n}\,(n!)^2}{(2\,n+1)!}.$$

Enfin, par croissance de l'intégrale, $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

(d) Par le point précédent,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad W_n \leqslant W_{n+1} \leqslant W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}\,W_n$$

donc $W_n \sim W_{n+1}$. En particulier, $W_{2\,n} \sim W_{2\,n+1}$. En utilisant (b), et les formules pour ces deux suite, on en déduit :

$$\frac{\pi^2}{C^2\,2\,n} \sim W_{2\,n}^2 \sim W_{2\,n}\,W_{2\,n+1} = \frac{\pi}{2\,(2\,n+1)} \sim \frac{\pi}{4\,n}$$

Donc $C = \sqrt{2\,\pi}$.

(e) Montrons que :

$$\boxed{\forall z \in \mathbb{C}, \quad e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}.}$$

Démonstration : Soit $z \in \mathbb{C}$. On considère la fonction définie par :

$$\forall t \in [0,1], \quad \varphi(t) = e^{t\,z}.$$

Alors φ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0,1]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|\varphi^{(n)}(t)| = |z|^n\,e^{t\,\mathrm{Re}(z)} \leqslant |z|^n\,e^{\mathrm{Re}(z)}$. Donc par la formule de Taylor-Lagrange appliquée en $a, t = 0, 1$:

$$e^z = \sum_{k=0}^{n} \frac{z^n}{n!} + R_n(1)$$

avec $|R_n(1)| \leqslant |z|^n\,e^{\mathrm{Re}(z)}/(n+1)!$, quantité qui tend vers 0 par la formule de Stirling.

■

Chapitre 15

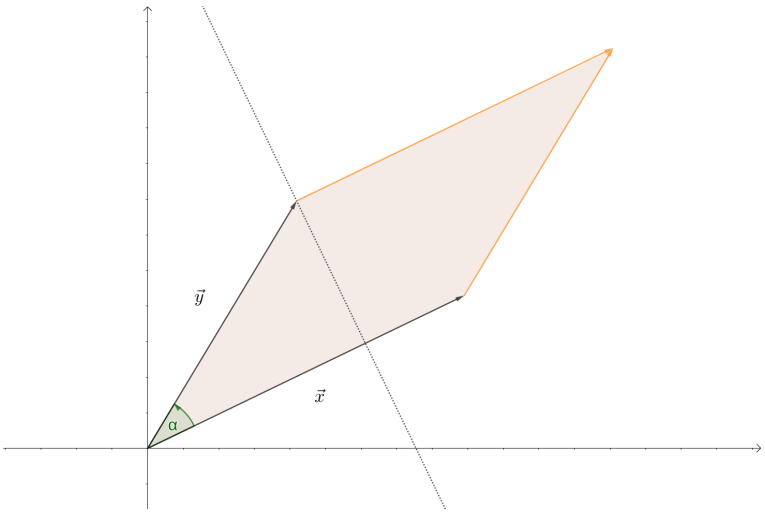
Déterminant d'une matrice

15.1 Aires, volumes, définition

15.1.1 Aire définie par deux vecteurs du plan

Soit $\vec{x}$ et $\vec{y}$ deux vecteurs du plan. L'aire orientée du parallélogramme défini par $\vec{x}$ et $\vec{y}$ est définie par :

$$\mathrm{Det}(\vec{x},\vec{y}) = \|\vec{x}\| \times \|\vec{y}\| \times \sin(\alpha).$$



Cette aire vérifie :

1. $\mathrm{Det}((1,0),(0,1)) = 1$,
2. *antisymétrie* : $\mathrm{Det}(\vec{x},\vec{y}) = -\mathrm{Det}(\vec{y},\vec{x})$,
3. *linéarité en chacune des variables* : pour tous vecteurs du plan $\vec{x}$, $\vec{y}$ et $\vec{z}$ et tout réel λ :

$$\mathrm{Det}(\vec{x}+\lambda.\vec{y},\vec{z}) = \mathrm{Det}(\vec{x},\vec{z}) + \lambda \times \mathrm{Det}(\vec{y},\vec{z}), \quad \mathrm{Det}(\vec{z},\vec{x}+\lambda.\vec{y}) = \mathrm{Det}(\vec{z},\vec{x}) + \lambda \times \mathrm{Det}(\vec{z},\vec{y}).$$

On en déduit que, si $\vec{x} = (x_1, x_2)$, $\vec{y} = (y_1, y_2)$:

$$\mathrm{Det}(\vec{x},\vec{y}) = x_1 \times y_2 - x_2 \times y_1.$$

Pour simplifier une généralisation en dimension supérieure, nous allons regrouper les vecteurs sous la forme d'une matrice, de la façon suivante :

$$\boxed{\mathrm{Det}\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = x_1 \times y_2 - x_2 \times y_1.}$$

15.1.2 Le cas général

Dans le suite de ce sous-chapitre, $n \geqslant 2$. On notera souvent les matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ à l'aide de leurs colonnes :

$$A = (C_1\ C_2\ \ldots C_n)$$

Théorème 15.1.43 : *Il existe une unique application $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ vérifiant :*

1. *f est linéaire par rapport à chacune des colonnes de sa variable,*
2. *f est antisymétrique par rapport aux colonnes de sa variable, c'est-à-dire si $1 \leqslant i < j \leqslant n$:*

$$f(C_1 \ \cdots C_{i-1}\ C_i\ C_{i+1} \cdots C_{j-1}\ C_j\ C_{j+1} \cdots C_n) = -f(C_1 \ \cdots C_{i-1}\ C_j\ C_{i+1} \cdots C_{j-1}\ C_i\ C_{j+1} \cdots C_n),$$

3. *$f(I_n) = 1$.*

On appelle cette application « déterminant » et on note, pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:

$$\mathrm{Det}(A) = |A| = f(A).$$

Démonstration : Montrons l'existence. On peut pour ceci raisonner par récurrence sur n. Nous allons effectuer le passage de $n = 2$ à $n = 3$ puis expliquer en remarque l'argument essentiel du cas général de l'hérédité.
On pose :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \times \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \times \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \times \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

On vérifie alors successivement les points de la définition.

a *linéarité* : c'est une conséquence immédiate de la linéarité du déterminant pour $n = 2$, montrons par exemple la compatibilité avec la somme pour la première colonne :

$$\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+b_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (a_{11}+b_{11}) \times \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \times \begin{vmatrix} a_{21}+b_{21} & a_{23} \\ a_{31}+b_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \times \begin{vmatrix} a_{21}+b_{21} & a_{22} \\ a_{31}+b_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11} \times \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \times \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \times \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} + b_{11} \times \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \times \begin{vmatrix} b_{21} & a_{23} \\ b_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \times \begin{vmatrix} b_{21} & a_{22} \\ b_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_{21} & a_{22} & a_{23} \\ b_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

b *antisymétrique* : effectuons le cas des deux premières colonnes, les autres se traitent de la même façon :

$$\begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} & a_{13} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{12} \times \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} - a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \times \underbrace{\begin{vmatrix} a_{22} & a_{21} \\ a_{32} & a_{31} \end{vmatrix}}_{=-\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}} . = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

c enfin,

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

■

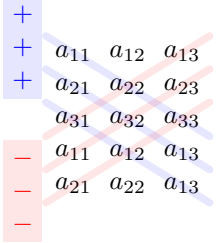
Remarque(s) 155 : 1. Pour $n = 3$, il est possible de donner une formule close. Si :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

alors :

$$\boxed{\mathrm{Det}(A) = (a_{11} \times a_{22} \times a_{33} + a_{21} \times a_{32} \times a_{13} + a_{31} \times a_{12} \times a_{33}) - (a_{13} \times a_{22} \times a_{31} + a_{23} \times a_{32} \times a_{11} + a_{33} \times a_{12} \times a_{31}).}$$

On peut facilement retenir cette formule grâce à la règle mnémotechnique de Sarrus :



2. Qu'en est-il de l'interprétation géométrique ? Faisons un emprunt à la physique. Si l'on voit les lignes [1] de la matrice comme les coordonnées des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$, on reconnaît dans la formule de définition du déterminant :
$$\langle \vec{u}, \vec{v} \wedge \vec{w} \rangle.$$
Le norme du produit vectoriel est la surface du parallélogramme engendré par $\vec{v}$ et $\vec{w}$, que l'on multiplie par la distance de la hauteur, qui correspond à celle de la projection de $\vec{u}$ sur l'orthogonal du plan engendré par $\vec{u}$ et $\vec{w}$. On reconnaît donc l'aire du parallélépipède construit à partir des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$. Le signe, quand à lui, s'interprète comme l'orientation des trois vecteurs. Si le déterminant est positif, $\vec{u}$ est dans le sens de $\vec{v} \wedge \vec{w}$ donc l'orientation du triplet est positive et si il est négatif, l'orientation est négative.
3. En général, pour passer d'un déterminant de taille n à un déterminant de taille $n-1$, on peut effectuer un développement suivant la première ligne comme nous l'avons fait pour passer de $n=3$ à $n=2$. plus précisément, si l'on pose, pour $1 \leqslant i \leqslant n$:
$$A_i = \begin{pmatrix} a_{2,1} & \cdots & a_{2,i-1} & a_{2,i+1} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,i-1} & a_{n,i+1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix},$$
la matrice $A = (a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ à laquelle on a supprimé la première ligne et la i-ème colonne, alors :
$$\boxed{\mathrm{Det}(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \times a_{1,i} \times \mathrm{Det}(A_i).}$$

Exemple(s) 214 :

214.1 On a :
$$\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{vmatrix} = 2\,a \times b \times c$$

214.2 On a :
$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & a & b & 1 \\ 1 & b & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & 1 \\ b & a & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a & 1 \\ 1 & b & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = a^2 - a - b^2 + 1 - a = a^2 - b^2 - 2\,a + 1.$$

214.3 Si T est une matrice triangulaire inférieure, alors le déterminant de T est la produit de ses éléments diagonaux. En effet, en développant suivant la première ligne :
$$\begin{vmatrix} t_{1,1} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \star & t_{2,2} & 0 & & \vdots \\ \star & \star & \ddots & \ddots & \vdots \\ \star & \star & \star & \ddots & 0 \\ \star & \star & \star & \star & t_{n,n} \end{vmatrix} = t_{1,1} \times \begin{vmatrix} t_{2,2} & 0 & \cdots & 0 \\ \star & \ddots & \ddots & \vdots \\ \star & \star & \ddots & 0 \\ \star & \star & \star & t_{n,n} \end{vmatrix}.$$
Et l'on conclut par une récurrence immédiate.

15.2 Calculs de déterminants

Commençons par quelques remarques d'ordre général. Le déterminant étant linéaire en chaque colonne de sa variable, on a comme pour toute application linéaire :

1. si l'une des colonnes d'un déterminant est nulle, alors le déterminant est nul

1. on verra plus loin que le déterminant d'une matrice et de sa transposée est le même, ce choix des lignes n'est donc pas arbitraire

2. si l'on multiplie une colonne par un scalaire λ, alors le déterminant est multiplié par λ. En particulier :

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \mathrm{Det}(\lambda.A) = \lambda^n \times \mathrm{Det}(A).$$

La remarque suivante est propre au caractère antisymétrique du déterminant :

Le déterminant d'une matrice ayant deux colonnes égales est nul.

Démonstration : Avec les notations du paragraphe précédent, si $C_i = C_j$:

$$\mathrm{Det}(A) = \mathrm{Det}(C_1, \dots, C_i, \dots, C_j, \dots, C_n) = -\mathrm{Det}(C_1, \dots, C_i, \dots, C_j, \dots, C_n) = -\mathrm{Det}(A).$$

Donc $\mathrm{Det}(A) = 0$.

■

Propriété(s) 15.2.111 : Les opérations (sur les colonnes) du pivot de Gauß ont les effets suivants sur le déterminant :

opération	le déterminant est
transvection $C_i \leftarrow C_i + \lambda.C_j$	inchangé
dilatation $C_i \leftarrow \lambda.C_i$	multiplié par λ
permutation $C_i \leftrightarrow C_j$	multiplié par -1

.

Démonstration : Le deuxième point et le troisième sont immédiats par définition. Montrons le premier. Par linéarité, on a (si $i < j$, la preuve est la même dans l'autre cas) :

$$\mathrm{Det}(C_1, \dots, C_i + \lambda.C_j, \dots C_j, \dots, C_n) = \mathrm{Det}(C_1, \dots, C_i, \dots C_j, \dots, C_n) + \lambda. \underbrace{\mathrm{Det}(C_1, \dots, C_j, \dots C_j, \dots, C_n)}_{=0 \text{ car cette matrice a deux colonnes égales}}.$$

■

Exemple(s) 215 :

215.1 On a :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \\ 1 & 5 & 25 & 125 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 5 & 19 \\ 1 & 2 & 12 & 56 \\ 1 & 3 & 21 & 117 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 19 \\ 2 & 12 & 56 \\ 3 & 21 & 117 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 18 \\ 3 & 6 & 60 \end{vmatrix} = 120 - 108 = 12.$$

215.2 Calculons les déterminants :

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \; D_2 = \begin{vmatrix} -4 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -4 \end{vmatrix}, \; D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ a & 0 & a & 0 & 3 \\ b & a & 0 & a & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 & a \end{vmatrix}$$

215.3 Soit D_n le déterminant de taille $2\,n$:

$$D_n = \begin{vmatrix} a & 0 & \dots & & \dots & b \\ 0 & a & \ddots & & b & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & b & & & a & 0 \\ b & 0 & \dots & & \dots & a \end{vmatrix}$$

alors $D_{n+1} = (a^2 - b^2)\, D_n$ donc $D_n = (a^2 - b^2)^n$ car $D_1 = a^2 - b^2$.

215.4 Soit Δ_n le déterminant de taille n suivant :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & 3 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 2 & 3 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

Alors, par développement par rapport à la première ligne :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \Delta_{n+2} = 3\,\Delta_{n+1} - 2\,\Delta_n.$$

On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \Delta_n = 2^{n+1} - 1$.

15.3 Propriétés du déterminant

Propriété(s) 15.3.112 : Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$. On a :

$$\mathrm{Det}(A \times B) = \mathrm{Det}(A) \times \mathrm{Det}(B).$$

Remarque(s) 156 :
1. Attention, $\mathrm{Det}(A + B) \neq \mathrm{Det}(A) + \mathrm{Det}(B)$ en général !
2. Cette propriété est essentiellement un corollaire du résultat suivant : si f est une fonction définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$ linéaire en chaque colonne et antisymétrique par rapport aux colonnes de sa variable alors :

$$\forall B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \quad f(B) = \mathrm{Det}(B)\, f(I_n).$$

Démonstration : La fonction définie par

$$\forall B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \quad f(B) = \mathrm{Det}(A \times B)$$

peut se réécrire, si l'on pose $B = (C_1\, C_2\, \cdots C_n)$:

$$f(C_1\, C_2\, \cdots C_n) = \mathrm{Det}(A \times C_1\, A \times C_2\, \cdots A \times C_n)$$

donc est linéaire en chacune des colonnes et antisymétrique par rapport aux colonnes car Det l'est. Par la remarque, on en déduit :

$$\mathrm{Det}(A \times B) = f(B) = \mathrm{Det}(B)\, f(I_n) = \mathrm{Det}(B)\,\mathrm{Det}(A).$$

■

Propriété(s) 15.3.113 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors A est inversible si et seulement si $\mathrm{Det}(A) \neq 0$. Dans ce cas :

$$\mathrm{Det}(A^{-1}) = \frac{1}{\mathrm{Det}(A)}.$$

Démonstration : Il y a deux cas :
1. la matrice est de rang strictement inférieur à n (donc non inversible) et une de ses colonnes est donc combinaison linéaire des autres. Le déterminant de A est alors nul.

2. sinon, A est inversible et :

$$A \times A^{-1} = I_n \quad \text{donc} \quad \mathrm{Det}(A)\,\mathrm{Det}(A^{-1}) = \mathrm{Det}(I_n) = 1$$

on en déduit que $\mathrm{Det}(A) \neq 0$ et que :

$$\mathrm{Det}(A^{-1}) = \frac{1}{\mathrm{Det}(A)}.$$

■

Exemple(s) 216 :

216.1 Calculons le déterminant puis le rang de la matrice :

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 & 5 \\ -2 & 1 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

216.2 Calculons le déterminant de la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} m & 0 & 1 & 2m \\ 1 & m & 0 & 0 \\ 0 & 2m+2 & m & 1 \\ m & 0 & 0 & m \end{pmatrix}.$$

Puis, suivant la valeur du paramètre m, le rang de cette matrice.

Propriété(s) 15.3.114 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a : $\mathrm{Det}(A^T) = \mathrm{Det}(A)$.

Remarque(s) 157 :

1. Il est donc possible d'effectuer sur les lignes du déterminant de A les mêmes opérations que sur ses colonnes.
2. Linéarité, caractère antisymétrique et alterné,
3. opérations du pivot de Gauss sur les lignes.

Du théorème précédent, on en déduit également qu'il est possible de développer la déterminant suivant n'importe quelle ligne donc n'importe quelle colonne (en se ramenant à un développement suivant la première ligne). Plus précisément, si l'on pose, pour $1 \leqslant i, j \leqslant n$:

$$A_{i,j} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,i-1} & a_{1,i+1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j-1,1} & \dots & a_{j-1,i-1} & a_{j-1,i+1} & \dots & a_{j-1,n} \\ a_{j+1,1} & \dots & a_{j+1,i-1} & a_{1,i+1} & \dots & a_{j+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,i-1} & a_{n,i+1} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix},$$

la matrice $A = (a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ à laquelle on a supprimé la j-ème ligne et la i-ème colonne, alors :

$$\boxed{\mathrm{Det}(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \times a_{j,i} \times \mathrm{Det}(A_{i,j}) \quad \text{et} \quad \mathrm{Det}(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \times a_{j,i} \times \mathrm{Det}(A_{i,j}).}$$

Démonstration : (*Version résumée car hors programme*). On raisonne par récurrence sur n. Le résultat est clair si $n = 1$. On prouve ensuite par l'unicité dans la propriété qui définit le déterminant qu'on peut le développer suivant le première colonne, ce qui montre l'hérédité.

■

15.4 Déterminant d'une famille de vecteurs, d'un endomorphisme

Définition 15.4.92 : *Soit E un espace vectoriel de dimension n. Soit $\mathcal{B}$ une base de E. Si $u \in \mathcal{L}(E)$, le déterminant de u dans la base $\mathcal{B}$ est le déterminant de la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$.*

Propriété(s) 15.4.115 : 1. Le déterminant de u ne dépend pas du choix de la base $\mathcal{B}$. On le note $\mathrm{Det}(u)$.
2. u est un isomorphisme si et seulement si $\mathrm{Det}(u) \neq 0$,
3. si u est un isomorphisme, $\mathrm{Det}(u^{-1}) = \mathrm{Det}(u)^{-1}$.
4. Soit $(u, v) \in \mathcal{L}(E)$. Alors : $\mathrm{Det}(u \circ v) = \mathrm{Det}(u) \times \mathrm{Det}(v)$.

Démonstration : Les points 2 à 4 sont des traductions immédiates des résultats sur les matrices. Pour le premier, on remarque que si $\mathbb{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases de E et P est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ alors :

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(u) = P \times \mathrm{mat}_{\mathcal{B}'}(u) \times P^{-1}$$

donc : $\mathrm{Det}(\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(u)) = \mathrm{Det}(P) \times \mathrm{Det}(\mathrm{mat}_{\mathcal{B}'}(u)) \times \underbrace{\mathrm{Det}(P^{-1})}_{=\mathrm{Det}(P)^{-1}} = \mathrm{Det}(\mathrm{mat}_{\mathcal{B}'}(u))$.

■

Exemple(s) 217 :

217.1 Calculons le déterminant de $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{K}_n[X])$ définie par $\varpi(P) = P - P'$.

Définition 15.4.93 : *Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base de E et $u_1, u_2, \ldots, u_n$ une famille de n vecteurs de E. On appelle déterminant de la famille $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ le déterminant de la matrice de l'endomorphisme u défini par :*

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad u(e_i) = u_i$$

et on le note $\mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(u_1, u_2, \ldots, u_n)$.

Propriété(s) 15.4.116 : Soit E un espace vectoriel de dimension n, $\mathcal{B}$ une base de E et $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ une famille de n vecteurs de E. Alors cette famille est une base de E si et seulement si : $\mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(u_1, u_2, \ldots, u_n) \neq 0$.

Démonstration : Ce déterminant est en effet non nul si et seulement si u est un isomorphisme si et seulement si $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ est une base de E.

■

Propriété(s) 15.4.117 : Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E. Alors si P est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$, pour toute famille $u_1, u_2, \ldots, u_n$ de vecteurs de E, on a :

$$\mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(u_1, u_2, \ldots, u_n) = \mathrm{Det}(P)\ \mathrm{Det}_{\mathcal{B}'}(u_1, u_2, \ldots, u_n).$$

Démonstration : Il s'agit de remarquer que, si :
1. u est l'endomorphisme défini par $u(e_i) = u_i$
2. v est l'endomorphisme défini par $v(e'_i) = u_i$
3. p est l'isomorphisme défini par $p(e_i) = e'_i$

alors $u = v \circ p$ et donc que :

$$\mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(u_1, u_2, \ldots, u_n) = \mathrm{Det}(u) = \mathrm{Det}(v)\,\mathrm{Det}(p) = \mathrm{Det}_{\mathcal{B}'}(u_1, u_2, \ldots, u_n)\ \mathrm{Det}(P).$$

■

Chapitre 16

Fonctions de deux variables.

16.1 Ouverts de $\mathbb{R}^2$, fonctions continues.

Dans toute cette partie, on considère $\mathbb{R}^2$, muni de son produit scalaire canonique et de sa norme euclidienne canonique :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \|(x,y)\| = \sqrt{x^2+y^2}$$

Définition 16.1.94 : *Soit $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$, soit $r > 0$.*

1. *On appelle boule ouverte de centre a et de rayon r et on note $B(a,r)$ l'ensemble :*

$$B(a,r) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \|(x,y)-(a_1,a_2)\| < r\right\} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, (x-a_1)^2+(y-a_2)^2 < r^2\right\}$$

2. *On appelle boule fermée de centre a et de rayon r et on note $B'(a,r)$ l'ensemble :*

$$B'(a,r) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \|(x,y)-(a_1,a_2)\| \leq r\right\} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, (x-a_1)^2+(y-a_2)^2 \leq r^2\right\}$$

Définition 16.1.95 : *Un sous-ensemble O de $\mathbb{R}^2$ est appelé ouvert si :*

$$\forall \mathbf{a} \in O, \exists r > 0, \quad B(\mathbf{a}, r) \subset O.$$

Exemple(s) 218 :

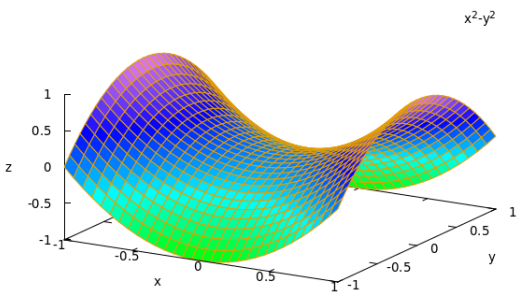
218.1 $\mathbb{R}^2$ et $\emptyset$ sont des ouverts de $\mathbb{R}^2$.

218.2 Toute boule ouverte B est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

218.3 Les boules fermées ne sont pas des ouverts de $\mathbb{R}^2$.

Dans la suite, on considérera des fonctions f, définies sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Il est souvent utile de se représenter le graphe d'une telle fonction par une surface dans $\mathbb{R}^3$. Voici par exemple celui de la fonction définie par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = x^2 - y^2.$$



Définition 16.1.96 : *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Soit $f \in \mathcal{F}(\Omega, \mathbb{R})$. Soit $l \in \mathbb{R}$. Soit $a = (x_0, y_0) \in \Omega$.*
On dit que f tend vers l en a si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists r > 0, \forall u \in \Omega, \|u - a\| \leq r \Rightarrow |f(u) - l| \leq \varepsilon$$

On note alors :

$$l = \lim_{u \to a} f(u) = \lim_{(x,y) \to (x_0, y_0)} f(x, y)$$

Remarque(s) 158 : 1. Cette définition est analogue à celle vue pour les fonctions d'une variable réelle.
2. On admet ici l'unicité de la limite et que les théorèmes généraux sur les limites restent vrais.

Exemple(s) 219 :

219.1 Étudier l'existence et la valeur éventuelle d'une limite en $(0, 0)$ pour les fonctions f suivantes :
(a) $f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$,
(b) $f(x, y) = \frac{xy^6}{x^6 + y^8}$.

Définition 16.1.97 : *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Soit $f \in \mathcal{F}(\Omega, \mathbb{R})$.*
1. Soit $a \in \Omega$. On dit que f est continue en a si f admet $f(a)$ pour limite en a :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists r > 0, \forall u \in \Omega, \|u - a\| \leq r \Rightarrow |f(u) - f(a)| \leq \varepsilon.$$

(a) On dit que f est continue sur Ω si f est continue en tout point de Ω.
(b) On note $\mathcal{C}^0(\Omega, \mathbb{R})$ ou $\mathcal{C}^0(\Omega)$ l'ensemble des fonctions continues sur Ω.

Remarque(s) 159 : Comme nous avons admis les théorèmes généraux pour les limites, ceux pour la continuité sont également vrais pour ces fonctions.

Exemple(s) 220 :

220.1 Étudier la continuité en $(0, 0)$ des fonctions suivantes de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$:
(a) $f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$,
(b) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$,
(c) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$.

16.2 Dérivées partielles.

Dans ce paragraphe, les ouverts sont tous considérés non vides.

Définition 16.2.98 : *Soit f une fonction définie sur un ouvert O de $\mathbb{R}^2$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soit (x_0, y_0) un élément de O. On dit que f admet en (x_0, y_0) des dérivée partielle (suivant x, et y) si les quantités :*

$$\frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} \quad \text{et} \quad \frac{f(x_0, y_0+h) - f(x_0, y_0)}{h}$$

convergent lorsque h tend vers 0. Dans ce cas, on note :

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \quad \text{et} \quad \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0, y_0+h) - f(x_0, y_0)}{h} = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0).$$

Remarque(s) 160 : 1. Attention, contrairement au cas des fonctions réelles à valeurs réelles, l'existence des dérivées partielles n'implique pas la continuité de la fonction, comme le montre la fonction f définie par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \quad f(x,y) = \frac{x\,y}{x^2+y^2}, \quad f(0,0) = 0$$

Démonstration :

(a) Les dérivées partielles existent en $(0,0)$ car :

$$\frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = 0 \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0 \quad \text{et} \quad \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = 0 \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

(b) Mais, si $t \in \mathbb{R}^*$:

$$f(t,t) = \frac{1}{2} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} \frac{1}{2} \neq 0 = f(0,0)$$

donc f n'est pas continue en $(0,0)$.

■

2. Lorsqu'une fonction est définie par une *formule*, calculer une dérivée partielle suivant x revient par définition à fixer y et à calculer la dérivée (au sens réel) en considérant seulement la variable x. Il en est de même pour les dérivées partielles suivant la variable y. Par exemple, dans l'exemple précédent, la fonction f admet des dérivées partielles en tout point de $\mathbb{R}^2$ différent de $(0,0)$ et :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y\,(x^2+y^2) - 2\,y\,x^2}{(x^2+y^2)^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x\,(x^2+y^2) - 2\,y^2\,x}{(x^2+y^2)^2}.$$

3. Lorsqu'elles existent, on note $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ les fonctions dérivées partielles.

Exemple(s) 221 :

221.1 Si elles existent, calculer les dérivées partielles des fonctions suivantes :

(a) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$,

(b) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^6}{x^2+(y-x)^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

Définition 16.2.99 : *Soit f une fonction définie sur un ouvert O et à valeurs dans $\mathbb{R}$. On dit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur O si elle y admet des dérivées partielles en tout $(x,y) \in O$ et si les fonctions $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont continues sur O.*

Remarque(s) 161 : On note $\mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$ ou $\mathcal{C}^1(\Omega)$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω.

Exemple(s) 222 :

222.1 Les fonctions suivantes sont-elles $\mathcal{C}^1$ en $(0,0)$?

(a) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$,

(b) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^6}{x^2+(y-x)^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

Théorème 16.2.44 : *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Soit $f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$. Soit $a = (x_0, y_0) \in \Omega$. On a :*

$$f(x_0+h, y_0+k) \underset{(h,k)\to(0,0)}{=} f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\,h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\,k + o(\|(h,k)\|).$$

Remarque(s) 162 :

1. Le développement limité d'ordre 1 montre que $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\,h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\,k$ est une approximation linéaire de $f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0,y_0)$.
2. On a :

$$f(x,y) \underset{(x,y)\to(x_0,y_0)}{=} f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0) + o\left(\|(x-x_0, y-y_0)\|\right).$$

Donc, par analogie avec les fonctions d'une variable :

$$z = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)$$

est une équation du plan tangent en (x_0, y_0) à la surface $z = f(x,y)$.

Propriété(s) 16.2.118 : Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Toute fonction $\mathcal{C}^1$ sur Ω est continue sur Ω.

Définition 16.2.100 : *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Soit $f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$. Soit $a = (x_0, y_0) \in \Omega$. On appelle gradient de f en $a = (x_0, y_0)$ et on note $\nabla f(x_0, y_0)$ le vecteur :*

$$\nabla f(x_0,y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right).$$

Remarque(s) 163 : Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Soit $f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$. Soit $a = (x_0, y_0) \in \Omega$. On a :

$$f(x_0+h, y_0+k) \underset{(h,k)\to(0,0)}{=} f(x_0,y_0) + < \nabla f(x_0,y_0), (h,k) > + o(\|(h,k)\|).$$

Le gradient de f en (x_0, y_0) définit donc la direction dans laquelle f croît le plus vite. En effet :

$$\frac{|f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0,y_0)|}{\|(h,k)\|} = \frac{|< \nabla f(x_0,y_0), (h,k) >|}{\|(h,k)\|} + o(1)$$

et d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\frac{|< \nabla f(x_0,y_0), (h,k) >|}{\|(h,k)\|} \leq \|\nabla f(x_0,y_0)\|,$$

avec égalité si et seulement si (h,k) est colinéaire à $\nabla f(x_0,y_0)$. Ainsi la pente maximale en valeur absolue est atteinte pour les vecteurs colinéaires au gradient.

Définition 16.2.101 : *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Soit $f \in \mathcal{F}(\Omega, \mathbb{R})$. Soit $a = (x_0, y_0) \in \Omega$. Soit v un vecteur non nul, $v \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$. On dit que f est dérivable selon le vecteur ν si l'application $\varphi_\nu : t \mapsto f(a+t\nu)$ est dérivable en 0 , on appelle alors dérivée en a selon le vecteur v et on note $D_v f(a)$ cette dérivée :*

$$D_v(a) = \lim_{t\to 0} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t}$$

Remarque(s) 164 : 1. Les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont les dérivées selon les vecteurs de la base canonique $(1,0)$ et $(0,1)$.

2. La dérivée selon un vecteur v correspond à la pente de la tangente à la fonction dans la direction du vecteur v.

Propriété(s) 16.2.119 : Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Soit $f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$. Soit $a = (x_0, y_0) \in \Omega$. On a :

$$D_v(a) =< \nabla f(a), v >$$

16.3 Dérivées partielles et composées

Théorème 16.3.45 : *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Soit $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$.*
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, soient $x, y \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ telles que : $\forall t \in I, ((x(t), y(t)) \in \Omega$.
Posons :

$$\begin{array}{rccc} g: & I & \to & \mathbb{R} \\ & t & \mapsto & f(x(t), y(t)). \end{array}$$

Alors $g \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ et :

$$\forall t \in I, g'(t) = x'(t)\frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) + y'(t)\frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t))$$

Remarque(s) 165 : 1. On peut également noter :

$$\forall t \in I, \frac{d}{dt}(f(x(t), y(t))) = x'(t)\frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) + y'(t)\frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)).$$

2. On considère un arc paramétré $\gamma : \gamma(t) = (x(t), y(t))$. On a :

$$(f \circ \gamma)'(t) = x'(t)\frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) + y'(t)\frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)) =< \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t) > .$$

Cette formule représente la dérivée de f selon l'arc γ.

3. Soit $k \in \mathbb{R}$, la ligne de niveau k est l'ensemble des points pour lesquels f est constante égale à k. Si on considère que cette ligne de niveau est paramétré par un arc γ, on a :

$$\forall t \in I, f \circ \gamma(t) = k.$$

Donc :

$$\forall t \in I, < \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t) >= (f \circ \gamma)'(t) = 0.$$

Comme $\gamma'(t)$ dirige la tangente à l'arc γ, c'est-à-dire la tangente à la ligne de niveau, alors : le gradient est orthogonal aux lignes de niveau de la fonction.

Théorème 16.3.46 : *Soit Ω_1 et Ω_2 des ouverts de $\mathbb{R}^2$. Soit $f \in \mathcal{C}^1(\Omega_1, \mathbb{R})$. Soient $\varphi, \psi \in \mathcal{C}^1(\Omega_2, \mathbb{R})$ telles que : $\forall (u,v) \in \Omega_2$, $(\varphi(u,v), \psi(u,v)) \in \Omega_1$.*
Posons :

$$\begin{aligned} g : \quad & \Omega_2 \to \mathbb{R} \\ & (u,v) \mapsto f(\varphi(u,v), \psi(u,v)). \end{aligned}$$

Alors $g \in \mathcal{C}^1(\Omega_2, \mathbb{R})$ et :

$$\forall (u,v) \in \Omega_2, \quad \begin{array}{l} \frac{\partial g}{\partial x}(u,v) = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(u,v)\frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(u,v), \psi(u,v)) + \frac{\partial \psi}{\partial x}(u,v)\frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(u,v), \psi(u,v)) \\ \frac{\partial g}{\partial y}(u,v) = \frac{\partial \varphi}{\partial y}(u,v)\frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(u,v), \psi(u,v)) + \frac{\partial \psi}{\partial y}(u,v)\frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(u,v), \psi(u,v)). \end{array}$$

Exemple(s) 223 :

223.1 Soit f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. Calculer les dérivées partielles des fonctions suivantes :

(a) $(x,y) \mapsto f(y,x)$,
(b) $(x,y) \mapsto f(x,x)$,
(c) $(x,y) \mapsto xyf\left(xy, x^2\right)$,
(d) $(x,y) \mapsto f(f(x,y), f(y,x))$.

223.2 Soit f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. Calculer les dérivées partielles de : $(r,\theta) \mapsto f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))$.
$\Rightarrow$ Exemple 7 : Déterminer les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ telles que :

$$2\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 y.$$

On pourra poser $(u,v) = (x, x+2y)$.

16.4 Extremums

Définition 16.4.102 : *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Soit $f \in \mathcal{F}(\Omega, \mathbb{R})$. Soit $a \in \Omega$. On dit que :*

1. *f admet un minimum global en a si :*

$$\forall u \in \Omega, f(a) \leq f(u),$$

2. *f admet un maximum global en a si :*

$$\forall u \in \Omega, f(a) \geq f(u),$$

3. *f admet un extremum global en a si f admet un minimum ou un maximum global en a,*
4. *f admet un minimum local en a si :*

$$\exists r > 0, \forall u \in \Omega \cap B(a,r), f(a) \leq f(u),$$

5. *f admet un maximum local en a si :*

$$\exists r > 0, \forall u \in \Omega \cap B(a,r), f(a) \geq f(u),$$

6. *f admet un extremum local en a ssi f admet un minimum ou un maximum local en a.*

Définition 16.4.103 : *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Soit $f \in \mathcal{F}(\Omega, \mathbb{R})$. Soit $a \in \Omega$. On dit que a est un point critique de f si f admet des dérivées partielles nulles en a :*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a) = \frac{\partial f}{\partial y}(a) = 0,$$

c'est-à-dire :

$$\nabla f(a) = (0,0).$$

Proposition 16.4.19 : *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Soit $f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$. Soit $a \in \Omega$.*
Si f admet un extremum local en a alors a est un point critique de f.

Remarque(s) 166 : Comme pour les fonctions d'une variable, la réciproque est fausse. Par exemple,

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto xy$$

admet un point critique en $(0,0)$ mais $(0,0)$ n'est pas un extremum local.

Exemple(s) 224 :

224.1 Étudier les extremums de :

(a) $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \to \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto (x-y)^2 + x^3 + y^3 \end{cases}$

(b) $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \to \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto (x-y)^2 + x^4 + y^4 \end{cases}$

(c) $f : \begin{cases} \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto x\left((\ln x)^2 + y^2\right. \end{cases}$