PCSI – TD_{67}

Vésale Nicolas

2017 – 2018

Exercice 1:

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 \in]0,1[$ donné et $u_{n+1} = u_n - {u_n}^2$. Montrer que cette suite converge et en donner la limite. Montrer que la série de terme général ${u_n}^2$ converge et en donner la limite. Montrer que les séries de terme généraux u_n et $\ln(u_{n+1}/u_n)$ divergent.

Exercice 2:

Soit (a_n) une suite de réels strictement positifs tels que, au voisinage de $+\infty$, on ait

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 + \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

1. Montrer que la série de terme général n^α est de ce type ; rappeler pour quelles valeurs de α elle converge.
2. Montrer que si $\alpha > -1$, la série de terme général a_n diverge, et que si $\alpha < -1$ elle converge.
3. Montrer que si l'on a au voisinage de $+\infty$,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n \ln n}\right),$$

alors la série de terme général a_n diverge.

Exercice 3:

Un homme trop alcoolisé titube dans une rue. Il fait des pas en avant ou en arrière, de manière aléatoire. Sa position au temps n est représentée par

$$S_n = X_1 + \cdots + X_n$$

où $X_1, ..., X_n$ sont des variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $\{-1, 1\}$. On pose $S_0 = 0$. Déterminer la probabilité que l'homme soit retourné au départ au temps n. En donner un équivalent en utilisant la formule de Stirling.

Exercice 4:

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace de probabilisé fini dont les évènements élémentaires sont de probabilités non nulles. On suppose qu'il existe une application f définie sur $X(\Omega)$ telle que X et $f(X)$ sont indépendantes. Montrer que f est constante sur $X(\Omega)$.