

PCSI – TD₆₆

Vésale Nicolas

2017 – 2018

Exercice 1:

Pour les polynômes suivants, donner leur décomposition en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$:

1. $P_1 = X^2 + 5X + 6$;
2. $P_2 = X^4 + 5X^2 + 6$;
3. $P_3 = X^4 - 4$;
4. $P_4 = X^3 + X^2 + X + 1$;
5. $P_5 = X^4 + X^2 + 1$;
6. $P_6 = X^4 + 1$;
7. $P_7 = X^5 + X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$;
8. $P_8 = X^6 + 1$.

Exercice 2:

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $P = X^3 + aX^2 + a^2X + a$. Déterminer les réels a pour lesquels 1 est une racine de P . Pour ces valeurs, décomposer P en un produit de polynômes irréductibles sur $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 3:

On considère l'application suivante définie sur \mathbb{C} :

$$F(z) = z^4 - 3z^3 + \frac{9}{2}z^2 - 3z + 1.$$

1. Soit z_0 une racine de F , montrer que \bar{z}_0 et $1/z_0$ sont également des racines de F .
2. Calculer $F(1 + i)$. En déduire l'ensemble des racines de F .
3. Factoriser le polynôme $F(X)$ dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 4:

Soit P un polynôme réel ou complexe scindé. Exprimer en fonction des coefficients de P le produit et la somme de ses racines.

Exercice 5:

De la factorisation de $X^n - 1$ sur \mathbb{C} déduire la valeur de $\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.