PCSI – TD_{65}

Vésale Nicolas

2017 – 2018

Exercice 1:

Effectuer les divisions euclidiennes de

1. $3\,X^5+4\,X^2+1$ par $X^2+2\,X+3$,
2. $3\,X^5+2\,X^4-X^2+1$ par X^3+X+2,
3. X^4-X^3+X-2 par $X^2-2\,X+4$,
4. $X^2-3\,i\,X-5\,(1+i)$ par $X-1+i$.

Exercice 2:

Pour $n\in\mathbb{N}$, montrer que

1. $X^2-X+1|(X-1)^{n+2}+X^{2\,n+1}$,
2. $X^2-2\,\cos\theta\,X+1|X^{2\,n}-2\,\cos(n\,\theta)\,X^n+1$.

Exercice 3:

Montrer que, si a est une racine de P, $(X-a)^n$ divise P si et seulement si $(X-a)^{n-1}$ divise P'.

Exercice 4:

1. Soit P un polynôme de degré n. Montrer que : $P, P', \dots, P^{(n)}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ et déterminer les coordonnées du polynôme Q défini par : $Q(X)=P(X+a)$, (a réel fixé) dans cette base.
2. Démontrer que $S=(X^k\times(1-X)^{n-k})_{0\leqslant k\leqslant n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$, et déterminer, pour tout $p\in[\![0,n]\!]$, les coordonnées du polynôme X^p dans cette base.

Exercice 5:

Montrer que l'application:

$$\varphi:\begin{cases}\mathbb{R}_{n+1}[X] & \longrightarrow \mathbb{R}_n[X]\\ P & \longmapsto P(X+1)-P(X)\end{cases}$$

est linéaire. Calculer son noyau et son image. En déduire que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, il existe un unique $P_n\in\mathbb{R}_{n+1}[X]$ tel que

$$P_n(0)=0 \quad \text{et} \quad P_n(X+1)-P_n(X)=X^n.$$