

PCSI – TD<sub>64</sub>

Vésale Nicolas

2017 – 2018

**Exercice 1:**

Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires indépendantes.  $X + Y$  et  $X - Y$  sont-elles indépendantes?

**Exercice 2:**

On tire une carte d'un jeu de 32 cartes. On considère les trois variables aléatoires:

$$X = \begin{cases} 1 & \text{si on tire un roi} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}, \quad Y = \begin{cases} 1 & \text{si on tire un valet} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}, \quad Z = \begin{cases} 1 & \text{si on tire un cœur} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

1. Déterminer les lois conjointes et les lois marginales des couples  $(X, Y)$  et  $(X, Z)$ ,
2.  $X$  et  $Y$  sont-elles indépendantes? Qu'en est-il de  $X$  et  $Z$ ?

**Exercice 3:**

Soit  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois de Bernoulli de paramètres  $p$  et  $q$ . Déterminer la loi de  $Z = \max(X, Y)$ .

**Exercice 4:**

Soit  $X \sim \mathcal{B}(n, p)$  et  $Y \sim \mathcal{B}(m, p)$  indépendantes. Montrer que  $X + Y \sim \mathcal{B}(n + m, p)$ .

**Exercice 5:**

Pour  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires, on pose:  $\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X)) \times (Y - \mathbb{E}(Y)))$ .

1. Montrer que si  $X$  et  $Y$  sont indépendantes, alors  $\text{Cov}(X, Y) = 0$ . A-t-on la réciproque?
2. Exprimer  $\text{Var}(X + Y)$  en fonction de  $\text{Var}(X)$ ,  $\text{Var}(Y)$  et  $\text{Cov}(X, Y)$ . En déduire que si  $X$  et  $Y$  sont indépendantes,  $\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y)$ .

**Exercice 6:**

Soient  $X$  et  $Y$  indépendantes suivant des lois  $\mathcal{U}(n)$ .

1. Déterminer la loi de  $X + Y$ ,
2. Calculer  $\mathbb{E}(\max(X, Y))$  puis  $\mathbb{E}(\min(X, Y))$ .