PCSI – TD$_{60}$

Vésale Nicolas

2017 – 2018

Exercice 1:

Soient $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, $a^2+b^2+c^2=1$ et p l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice dans la base canonique

$$P = \begin{pmatrix} a^2 & a\times b & a\times c \\ a\times b & b^2 & b\times c \\ a\times c & b\times c & c^2 \end{pmatrix}$$

Montrer que p est une projection, que l'on caractérisera géométriquement.

Exercice 2:

On rappelle que la formule:

$$\langle P,Q\rangle = P(0)\times Q(0) + P(1)\times Q(1) + P(2)\times Q(2)$$

définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[x]$. On confondra dans la suite les fonctions polynomiales et leurs formules. On pose: $\Pi = \{a\,x+b, \quad (a,b)\in\mathbb{R}^2\}$.

1. Donner la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[x]$ de la projection orthogonale sur Π.
2. Calculer $d(x^2,\Pi)$.

Exercice 3:

On note a, b, c des réels. Calculer les déterminants suivants.

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix},\ D_2 = \begin{vmatrix} a+b+c & b & b & b \\ c & a+b+c & b & b \\ c & c & a+b+c & b \\ c & c & c & a+b+c \end{vmatrix},\ D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ a & 0 & a & 0 & 3 \\ b & a & 0 & a & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 & a \end{vmatrix}.$$

Exercice 4:

On note $a_1,\cdots,a_n$ des réels. Calculer :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$