PCSI – TD$_{59}$

Vésale Nicolas

2017 – 2018

Exercice 1:

Soit T l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par sa matrice A dans la base canonique (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Soient $f_1 = -2\,e_1 + e_2 + e_3$, $f_2 = e_1 + e_2 + e_3$ et $f_3 = 2\,e_1 + 3\,e_2 - e_3$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$.
   (a) Justifier que (f_1, f_2, f_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.
   (b) Écrire la matrice P de passage de la base (e_1, e_2, e_3) à la base (f_1, f_2, f_3). Calculer P^{-1}.
   (c) Ecrire la matrice D de T dans la base (f_1, f_2, f_3) .
2. Quelle relation relie A, D, P et P^{-1} ? En déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2:

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique (i, j, k) de $\mathbb{R}^3$ est :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que u est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$ et déterminer u^{-1}.
2. Déterminer une base (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$ telle que $u(e_1) = e_1$, $u(e_2) = e_1 + e_2$ et $u(e_3) = e_2 + e_3$.
3. Déterminer P la matrice de passage de (i, j, k) à (e_1, e_2, e_3) ainsi que P^{-1}.
4. En déduire $u^n(i)$, $u^n(j)$ et $u^n(k)$ pour $n \in \mathbb{Z}$.

Exercice 3:

1. Soit r la rotation de $\mathbb{R}^3$ d'axe dirigé par $(1, 1, 1)$ et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$. Donner la matrice de r dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
2. Soit s symétrie orthogonale $\mathbb{R}^3$ par rapport au plan d'équation $x + y + z = 0$. Donner la matrice de s dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.