PCSI – TD_{58}

Vésale Nicolas

2017 – 2018

Exercice 1:

On considère les applications linéaires suivantes.

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto (2\,x-y, y-z) \end{cases} \qquad g : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \longmapsto (x+y, x-y, 2\,x+3\,y) \end{cases}$$

1. L'application f est elle injective ? surjective ?
2. L'application g est elle injective ? surjective ?
3. Déterminer $g \circ f$. Est-elle injective ? surjective ?
4. Déterminer $f \circ g$. Est-elle injective ? surjective ?

Exercice 2:

Soit E un espace vectoriel de dimension finie φ et ψ deux applications linéaires de E dans lui-même telles que $\varphi \circ \psi = \mathrm{Id}_E$. Montrer que $\psi \circ \varphi = \mathrm{Id}_E$.

Exercice 3:

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $(f,g) \in \mathcal{L}(E)^2$. Établir :

1. $\mathrm{Im}(f \circ g) = \mathrm{Im}(f_{|\mathrm{Im}(g)})$.
2. En déduire: $\mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g) - \dim E \leqslant \mathrm{rg}(f \circ g) \leqslant \min(\mathrm{rg}(f), \mathrm{rg}(g))$.

Exercice 4:

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^6$ tel que $\mathrm{rg}(f \circ f) = 3$. Quels sont les rangs possibles pour f? (on pourra utiliser l'exercice précédent pour réduire les cas puis donner des exemples en pensant à des matrices)

Exercice 5:

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et f un endomorphisme de E nilpotent i.e. tel qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ pour lequel $f^n = 0$. Montrer que $\mathrm{Id} - f$ est un isomorphisme et exprimer f^{-1} en fonction de f.