PCSI – TD$_{57}$

Vésale Nicolas

2017 – 2018

Exercice 1:

Déterminer une base du noyau et de l'image des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & -3 \\ -3 & 5 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2:

On considère l'application f définie sur $\mathbb{R}_2[x]$ par:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(P)(x) = (x^2 - 1) \times P''(x) + 2\,x \times P'(x)$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[x]$.
2. Donner sa matrice dans la base canonique.
3. En déduire le rang de f puis une base de $\ker(f)$.

Exercice 3:

Donner des exemples d'applications linéaires de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ vérifiant :

1. $\ker(f) = \mathrm{Im}(f)$.
2. $\ker(f) \subsetneq \mathrm{Im}(f)$.
3. $\mathrm{Im}(f) \subsetneq \ker(f)$.

Exercice 4:

Pour des applications linéaires $f : E \to F$, $g : F \to G$, montrer que:

1. $\ker(f) \subset \ker(g \circ f)$,
2. $\mathrm{Im}(g \circ f) \subset \mathrm{Im}(f)$,
3. $g \circ f = 0 \Leftrightarrow \mathrm{Im} f \subset \ker g$.

Exercice 5:

Soit E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels de E, et $f\colon E_1 \times E_2 \to E$, $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$.

1. Montrer que f est linéaire,
2. déterminer le noyau et l'image de f.