PCSI – TD$_{56}$

Vésale Nicolas

2017 – 2018

Exercice 1:

Soit $a \in \mathbb{R}$. Lesquelles des applications suivantes sont linéaires ?

1. $f_1 : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (2\,x + y, a\,x - y) \in \mathbb{R}^2$
2. $f_2 : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto (x \times y, a\,x, y) \in \mathbb{R}^3$
3. $f_3 : P \in \mathbb{R}_3[x] \mapsto a\,P' + P \in \mathbb{R}_3[x]$
4. $f_5 : P \in \mathbb{R}_2[x] \mapsto (P(0), P(1)) \in \mathbb{R}^2$

Pour celles qui sont linéaires, donner leurs matrices pour les bases canoniques.

Exercice 2:

Soit E un espace vectoriel, et u une application linéaire de E dans E. Dire si les propriétés suivantes sont vraies ou fausses :

1. Si $e_1, e_2, \ldots, e_p$ est libre, il en est de même de $u(e_1), u(e_2), \ldots, u(e_p)$. Réciproque?
2. Si $e_1, e_2, \ldots, e_p$ est génératrice, il en est de même de $u(e_1), u(e_2), \ldots, u(e_p)$. Réciproque?

Exercice 3:

Vérifier qu'il existe une unique application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ vérifiant $f((1, 0, 0)) = (1, 1)$ puis $f((0, 1, 0)) = (0, 1)$ et $f((0, 0, 1)) = (-1, 1)$. Donner la matrice de f dans les bases canoniques, puis, après avoir vérifié que ce sont des bases, dans les bases:

$$(1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1) \quad \text{et} \quad (1, 0), (1, 1).$$

Exercice 4:

Soit $E = \mathbb{K}_n[x]$ et u l'endomorphisme de E défini par :

$$\forall P \in E \forall x \in \mathbb{R}, \quad u(P)(x) = P(x + 1) - P(x).$$

Déterminer une base dans laquelle la matrice de u est

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \ldots & & \ldots & 0 \end{pmatrix}.$$