

PCSI – TD₅₅

Vésale Nicolas

2017 – 2018

Exercice 1:

En justifiant votre réponse, classer les dix séries $\sum u_n$ suivantes en 4 catégories

- GD: celles telles que u_n ne tend pas vers 0;
- ZD: celles qui divergent et telles que $\lim u_n = 0$;
- AC: celles qui convergent absolument;
- SC: celles qui convergent, mais non absolument.

(Attention: pour pouvoir répondre, certaines séries demandent deux démonstrations: par exemple pour montrer que $\sum u_n$ est SC, il faut montrer que $\sum u_n$ converge *et* que $\sum |u_n|$ diverge.

- | | | |
|-----------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------|
| 1. $\sum \left(\frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{n^2} \right)$, | 5. $\sum \frac{n!}{n^n}$, | 9. $\sum \sin(\pi n) \times \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$, |
| 2. $\sum \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \right)$, | 6. $\sum \left(1 - \left(1 - \frac{1}{n} \right)^n \right)$, | 10. $\sum \left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k} \times \frac{1}{3^{n-k}} \right)$. |
| 3. $\sum \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \right)^2$, | 7. $\sum \frac{2^n + 1000}{3^n + 1}$, | |
| 4. $\sum \left[\frac{1}{n} - \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right]$, | 8. $\sum \left(1 - \cos \frac{\pi}{n} \right)$, | |

Exercice 2:

Étudier, suivant la valeur des paramètres réels α et β la nature des séries ¹ $\sum \frac{1}{n^\alpha \times (\ln(n))^\beta}$.

Exercice 3:

Par comparaison à une intégrale, donner un équivalent de :

- | | | |
|----------------------------------------------|---------------------------------------------|-----------------------------------|
| 1. $\sum_{k=2}^n \frac{1}{k \times \ln k}$, | 2. $\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{k}}$, | 3. $u_n = \sum_{k=1}^n \ln^2 k$. |
|----------------------------------------------|---------------------------------------------|-----------------------------------|

¹dites « de Bertrand »