PCSI – TD$_{53}$

Vésale Nicolas

2017 – 2018

Exercice 1 :

Soit $f \in C^0([0,1],\mathbb{R})$ telle que $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}$. Montrer qu'il existe $a \in]0,1[$ telle que $f(a) = a$.

Exercice 2 :

Soit $f \in C^1([a,b],\mathbb{R})$, $I_n = \displaystyle\int_a^b f(t) \times \sin(n\,t)\,\mathrm{d}t$. Avec une intégration par parties prouver $I_n \to 0$.

Exercice 3 :

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)dt$. Vrai ou faux :

1. F est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Si f est croissante sur $\mathbb{R}$ alors F est croissante sur $\mathbb{R}$.
3. Si f est positive sur $\mathbb{R}$ alors F est positive sur $\mathbb{R}$.
4. Si f est positive sur $\mathbb{R}$ alors F est croissante sur $\mathbb{R}$.
5. Si f est T-périodique sur $\mathbb{R}$ alors F est T-périodique sur $\mathbb{R}$.
6. Si f est paire alors F est impaire.

Exercice 4 :

Soient u et v deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et f une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

1. On pose $F(x) = \displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,\mathrm{d}t$. Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.
2. Calculer la dérivée de $G(x) = \displaystyle\int_x^{2\,x} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2+t^4}$.

Exercice 5 :

Soit $f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ positive. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\int_a^b (f(x))^n\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}} = \max\{f(x), x \in [a,b]\}$.