

PCSI – TD₅₂

Vésale Nicolas

2017 – 2018

Exercice 1:

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E . Montrer que :

1. Si $F \subset G$ alors $G^\perp \subset F^\perp$.
2. $(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$.
3. $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$.
4. Si $\dim(E)$ est finie, alors $(F^\perp)^\perp = F$.

Exercice 2:

Soit $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire usuel. On considère $F = \{f \in E, f(0) = 0\}$. Montrer que $F^\perp = \{0\}$.

Exercice 3:

Soit f la fonction définie sur $[0, 3]$ par

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } 0 < x < 1 \\ 3 & \text{si } x = 1 \\ -2 & \text{si } 1 < x \leq 2 \\ 4 & \text{si } 2 < x \leq 3. \end{cases}$$

1. Calculer $\int_0^3 f(t)dt$.
2. Soit $x \in [0, 3]$, calculer $F(x) = \int_0^x f(t)dt$.
3. Montrer que F est une fonction continue sur $[0, 3]$; est-elle dérivable sur $[0, 3]$?

Exercice 4:

Parmi les fonctions suivantes, lesquelles admettent une primitive?

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}.$$