PCSI – TD_{51}

Vésale Nicolas

2017 – 2018

Exercice 1:

Pour quelles valeurs de $t \in \mathbb{R}$ les vecteurs $(1,0,t),(1,1,t),(t,0,1)$ forment-ils une base de $\mathbb{R}^3$? Pour ces valeurs, orthonormaliser la famille.

Exercice 2:

Trouver une base orthonormée de $\mathbb{R}_3[x]$ pour le produit scalaire :

$$\langle P, Q\rangle = \int_{t=-1}^{1} P(t) \times Q(t)\, dt.$$

Faire de même pour $\mathbb{R}_3[x]$ pour le produit scalaire:

$$(P \mid Q) = \sum_{i=0}^{4} P(i) \times Q(i).$$

Exercice 3:

Soit F, G et H trois sous-espaces d'un espace vectoriel E de dimension finie. Comparer les espaces $F \cap G + F \cap H$ et $F \cap (G+H)$. En déduire que:

$$\dim(F+G+H) \leqslant \dim F + \dim G + \dim H - \dim(F\cap G) - \dim(G\cap H) - \dim(H \cap F) + \dim(F\cap G\cap H).$$

Exercice 4:

Soit $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie de la manière suivante : si $u=(x,y,z)$ et $u'=(x',y',z')$ alors

$$f(u,u') = 2\,x \times x' + y \times y' + 2\,z \times z' + x \times y' + y \times x' + x \times z' + z \times x' + y \times z' + z \times y'.$$

1. Montrer que f est un produit scalaire sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$.
2. Soit P le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ d'équation cartésienne $2\,x+y+z=0$.
   (a) Déterminer l'orthogonal du sous-espace vectoriel P.
   (b) Déterminer un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ dont l'orthogonal est P.
3. Déterminer l'orthonormalisée de Gram-Schmidt de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ pour le produit scalaire f.