PCSI – TD$_{50}$

Vésale Nicolas

2017 – 2018

Exercice 1:

Soit $(E, \langle ., . \rangle)$ un espace préhilbertien réel. Montrer que:

$$\forall (x,y) \in E^2, \quad 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right) = \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2.$$

On appelle cette expression « égalité du parallélogramme ». Sauriez-vous expliquer pourquoi?

Exercice 2:

Soit w continue, strictement positive sur $[a,b]$. Montrer qu'on définit un produit scalaire sur $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ par:

$$\forall (f,g) \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R}), \quad \langle f, g \rangle = \int_a^b f(t) \times g(t) \times w(t)\,\mathrm{d}t$$

Exercice 3:

Pour quelles valeurs de λ l'application suivante définit-elle un produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$?

$$f(x,y) = x_1 \times y_1 + 6\,x_2 \times y_2 + 3\,x_3 \times y_3 + 2\,x_1 \times y_2 + 2\,x_2 \times y_1 + 3\lambda\,x_1 \times y_3 + 3\lambda\,x_3 \times y_1$$

Exercice 4:

Montrer les inégalités suivantes, puis étudier les cas d'égalité.

1. $\forall (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n, \sum_{i=1}^{n} x_i \leqslant \sqrt{n} \times \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$.
2. $\forall f \in C^0([a,b],\mathbb{R}) \qquad \left(\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right)^2 \leqslant (b-a) \times \int_a^b f^2(t)\,\mathrm{d}t.$
3. $\forall (x_1, \ldots, x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$ t.q. $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1, \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i} \geqslant n^2.$

Exercice 5:

Soient x, y et z trois réels tels que $x^2 + 2\,y^2 + 3\,z^2 \leqslant 1$. Montrer l'inégalité : $(x+y+z)^2 \leqslant \dfrac{11}{6}$.