PCSI – TD$_5$

Vésale Nicolas

2017 – 2018

Exercice 1 :

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer l'ensemble de définition et calculer la dérivée (en précisant sur quel ensemble on dérive).

$$\begin{array}{lll}
a(x) = \dfrac{1}{x^2} & b(x) = \dfrac{1}{(x+1)^3} & c(x) = \dfrac{1}{(x-a)^n} \\
d(x) = \dfrac{x^n}{n!} & e(x) = \dfrac{(a-x)^n}{n!} & f(x) = \dfrac{x}{x^2+1} \\
g(x) = \dfrac{x}{\sin x} & h(x) = \cos \sqrt{x} & i(x) = \sqrt{\cos x} \\
j(x) = e^{\tan x} & k(x) = e^{\sqrt{x^2+x+1}} & l(x) = x \times \ln(x^2+1) \\
m(x) = \ln(\cos(2\,x)) & n(x) = \ln(\ln x) & o(x) = \ln |x| \\
p(x) = \dfrac{(\ln x)^3}{x} & q(x) = \sin(x^2+2x-3) & r(x) = \cos^2(x^2+2x-3) \\
s(x) = \cos\left((x^2+2x-3)^2\right) & t(x) = \dfrac{\cos x}{\sqrt{\sin x + 2}} & u(x) = \dfrac{1}{(e^x+e^{-x})^2}
\end{array}$$

Exercice 2 :

Soient a, b, c, d des réels et u une fonction dérivable sur I. Donner une expression simple de la dérivée des fonctions d'expressions suivantes (là où elles sont définies)

$$f(x) = \frac{a \times x + b}{c \times x + d}, \qquad g(x) = \frac{a \times u(x) + b}{c \times u(x) + d}, \qquad h(x) = \frac{3\,x \times \ln x + 1}{2\,x \times \ln x + 3}$$

Exercice 3 :

1. Considérons $\theta(x) = e^{a(x)} \times f(x)$, où f et a sont des fonctions dérivables sur I. Calculer la dérivée de θ.
2. Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ dérivable sur $[0, +\infty[$ telle que : $\forall x \geq 0,\ f'(x) + f(x) \leq 1$. Montrer que la fonction f est majorée. Indication : introduire la fonction $g : x \mapsto e^x \times f(x)$.