PCSI – TD$_{49}$

Vésale Nicolas

2017 – 2018

Exercice 1 :

Dans $\mathbb{R}^3$, les vecteurs suivants forment-ils une base ? Sinon décrire le sous-espace qu'ils engendrent.

1. $v_1 = (1, 1, 1), v_2 = (3, 0, -1), v_3 = (-1, 1, -1)$.
2. $v_1 = (1, 2, 3), v_2 = (3, 0, -1), v_3 = (1, 8, 13)$.
3. $v_1 = (1, 2, -3), v_2 = (1, 0, -1), v_3 = (1, 10, -11)$.

Exercice 2 :

On considère $\Pi = \text{Vect}\,\{(1, 1, 1), (1, 1, -1)\}$ et $D = \text{Vect}\,\{(0, 1, -1)\}$. Montrer que $\mathbb{R}^3 = \Pi \oplus D$.

Exercice 3 :

Dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, montrer que les sous-ensembles des fonctions constantes et celui des fonctions qui valent 0 en 1 sont des sous-espaces vectoriels puis qu'ils sont supplémentaires.

Exercice 4 :

Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les familles de vecteurs suivantes
$v_1 = (1, 1, 1, 1)$, $v_2 = (0, 1, 2, -1)$, $v_3 = (1, 0, -2, 3)$, $v_4 = (2, 1, 0, -1)$, $v_5 = (4, 3, 2, 1)$.
$v_1 = (1, 2, 3, 4)$, $v_2 = (0, 1, 2, -1)$, $v_3 = (3, 4, 5, 16)$.
$v_1 = (1, 2, 3, 4)$, $v_2 = (0, 1, 2, -1)$, $v_3 = (2, 1, 0, 11)$, $v_4 = (3, 4, 5, 14)$.
Ces vecteurs forment-ils :

1. Une famille libre ? Si oui, la compléter pour obtenir une base de $\mathbb{R}^4$. Si non donner des relations de dépendance entre eux et extraire de cette famille au moins une famille libre.
2. Une famille génératrice ? Si oui, en extraire au moins une base de l'espace. Si non, donner la dimension du sous-espace qu'ils engendrent.

Exercice 5 :

Soient $E = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x + y + z + t = 0\right\}$ et $F = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x + y = z + t\right\}$. Déterminer $\dim E$, $\dim F$, $\dim(E + F)$ et $\dim(E \cap F)$.

Exercice 6 :

Déterminer la dimension et une base de l'ensemble des solutions de $y'' + p \times y' + q \times y = 0$.