

PCSI – TD<sub>48</sub>

Vésale Nicolas

2017 – 2018

**Exercice 1 :**

Les familles suivantes sont-elles libres ?

1.  $(1, 0, 1)$ ,  $(0, 2, 2)$  et  $(3, 7, 1)$  dans  $\mathbb{R}^3$ .
2.  $(1, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 1)$  et  $(1, 1, 1)$  dans  $\mathbb{R}^3$ .
3.  $(1, 2, 1, 2, 1)$ ,  $(2, 1, 2, 1, 2)$ ,  $(1, 0, 1, 1, 0)$  et  $(0, 1, 0, 0, 1)$  dans  $\mathbb{R}^5$ .
4.  $(2, 4, 3, -1, -2, 1)$ ,  $(1, 1, 2, 1, 3, 1)$  et  $(0, -1, 0, 3, 6, 2)$  dans  $\mathbb{R}^6$ .

**Exercice 2 :**

1. Donner, dans  $\mathbb{R}^3$ , un exemple de famille libre, qui n'est pas génératrice.
2. Donner, dans  $\mathbb{R}^3$ , un exemple de famille génératrice, mais qui n'est pas libre.

**Exercice 3 :**On considère une famille de 4 vecteurs linéairement indépendants :  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4)$ . Les familles suivantes sont-elles libres ?

- |  |   |
|--|---|
| 1. $(\vec{e}_1, 2\vec{e}_2, \vec{e}_3)$ .                                    | 4. $(\vec{e}_1, 2\vec{e}_1 + \vec{e}_4, \vec{e}_4)$ .                                     |
| 2. $(\vec{e}_1, \vec{e}_3)$ .  | 5. $(3\vec{e}_1 + \vec{e}_3, \vec{e}_3, \vec{e}_2 + \vec{e}_3)$ .                         |
| 3. $(\vec{e}_1 - \vec{e}_2, \vec{e}_2 - \vec{e}_3, \vec{e}_3 - \vec{e}_1)$ . | 6. $(2\vec{e}_1 + \vec{e}_2, \vec{e}_1 - 3\vec{e}_2, \vec{e}_4, \vec{e}_2 - \vec{e}_1)$ . |

**Exercice 4 :**Prouver que dans  $\mathbb{R}^3$ , les vecteurs  $u_1 = (2, 3, -1)$  et  $u_2 = (1, -1, -2)$  engendrent le même s.e.v. que les vecteurs  $v_1 = (3, 7, 0)$  et  $v_2 = (5, 0, -7)$ .**Exercice 5 :**Dans  $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ , les trois fonctions  $x \mapsto \sin x$ ,  $x \mapsto \sin(2x)$ ,  $x \mapsto \sin(3x)$ , sont-elles linéairement indépendantes ? Généraliser.**Exercice 6 :**Soient  $f(x) = \cos(x)$ ,  $g(x) = \cos(x) \times \cos(2x)$  et  $h(x) = \sin(x) \times \sin(2x)$ . Déterminer  $\text{Vect}(f, g, h)$ .