PCSI – TD$_{47}$

Vésale Nicolas

2017 – 2018

Exercice 1 :

Donner une équation cartésienne du plan de $\mathbb{R}^3$ qui passe par les points :

$$(1,-1,0), \quad (0,1,-1), \quad \text{et} \quad (1,0,-1)$$

ce plan est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$?

Exercice 2 :

On rappelle que l'ensemble des suites à coefficients dans $\mathbb{K}$, $\mathcal{F}(\mathbb{N},\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

1. Rappeler le neutre et les opérations sur cet ensemble.
2. Soit a et b deux éléments de $\mathbb{K}$.
   (a) L'ensemble des suites (u_n) vérifiant pour tout n : $u_{n+2} + a\,u_{n+1} + b\,u_n = 0$ est-il un sous-espace vectoriel ?
   (b) À quelle condition sur b l'ensemble des suites (u_n) vérifiant pour tout n : $u_{n+1} = a\,u_n + b$ est-il un sous-espace vectoriel ?

Exercice 3 :

Les affirmations suivante sont-elles vraies pour tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel E ?

1. $\forall x \in E, \quad -(-x) = x,$
2. $\forall (x,y) \in E^2, \forall \lambda \in \mathbb{K}^*, \quad \lambda.x = \lambda.y \Longrightarrow x = y,$
3. $\forall (x,y) \in E^2,\ x \neq y, \forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2, \quad \lambda.x + \mu.y = 0 \Longrightarrow \lambda = \mu = 0,$
4. le réunion de deux sous-espaces vectoriels de E est un sous-espace vectoriel de E,
5. l'intersection de deux sous-espaces vectoriels de E est un sous-espace vectoriel de E.

Exercice 4 :

Soit E un espace vectoriel et F et G deux sous-espaces de E. Montrer que

$$F \cup G \text{ est un sous-espace vectoriel de } E \Longleftrightarrow F \subset G \text{ ou } G \subset F.$$