PCSI – TD_{44}

Vésale Nicolas

2017 – 2018

Exercice 1 :

Calculer les développements limités suivants :

$$e^x \times \sin(x) \text{ au point } 0 \text{ à l'ordre } 3, \quad \sinh(x) \times \ln(1+x) \text{ au point } 0 \text{ à l'ordre } 5$$

Exercice 2 :

On considère la fonction définie, pour $x \in \mathbb{R}^*$ par : $f(x) = (e^{x^2} - 1)/x$. Donner un développement limité à l'ordre 3 en 0 de f. En déduire que f se prolonge en une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Le prolongement de f sur $\mathbb{R}$ est-il dérivable sur $\mathbb{R}$? De classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$?

Exercice 3 :

Soit $n \in \mathbb{N}$. déterminer le développement limité à l'ordre $2\,n+2$ en 0 de $f(x) = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$. [1]

Exercice 4 :

Soit f et g deux fonctions p-fois dérivables sur un intervalle I. Soit $a \in I$. On suppose que :

$$\forall i \in [\![0, p-1]\!], \quad f^{(i)}(a) = g^{(i)}(a) = 0 \quad \text{et} \quad g^{(p)}(a) \neq 0.$$

1. Donner un développement limité à l'ordre p en a de f et de g.
2. En déduire que f/g admet une limite en a, que l'on calculera.
3. *Application.* Calculer la limite : $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos(2\,x) - 1}{x^3 + 5\,x^2}$.

Exercice 5 :

Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et n un entier naturel. Soit f une fonction dérivable $n+1$ fois sur $]a, b[$, de dérivée n-ième continue sur $[a, b]$. Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que [2]

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \times (b-a)^k + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} \times f^{(n+1)}(c).$$

1. On pourra commencer par calculer la dérivée de cette fonction.
2. Indication : appliquer Rolle à $g(x) = f(b) - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{k!} \times (b-x)^k - A \times \frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!}$ où A est bien choisi.