PCSI – TD_{43}

Vésale Nicolas

2017 – 2018

Exercice 1 :

Calculer la fonction dérivée d'ordre n des fonctions définies par :

$$f(x) = \sin^2 x \quad ; \quad g(x) = \sin(x) \times e^x; \quad h(x) = x^2 \times e^x; \quad k(x) = x^{n-1} \times \ln x.$$

Exercice 2 :

Montrer que la suite réelle (x_n) définie par $x_0 \in [a, b]$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(f(x_n) + x_n\right)$$

où f est k-lipschitzienne ($k < 1$) de $[a, b]$ dans $[a, b]$, converge vers un point fixe $l \in [a, b]$ de f. Plus difficile : montrer que l'est encore vrai si $k = 1$.

Exercice 3 :

Soit $m \in \mathbb{N}$. On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f_m(x) = x^m$. En remarquant que $f_{2n} = f_n \times f_n$ et en utilisant la formule de Leibniz, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.$$

Exercice 4 :

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application. On dit que f est α-höldérdienne ($\alpha > 0$) s'il existe $M > 0$:

$$\forall (x, y) \in I^2, |f(x) - f(y)| \leqslant M \times |x - y|^\alpha.$$

1. Montrer que si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment I, alors f est 1-höldérdienne.
2. Montrer que si f est α-höldérdienne, $\alpha > 1$ alors f est constante [1].
3. (difficile) On considère la fonction $f : x \in]0, 1] \mapsto x \times \ln(x) \in \mathbb{R}$. Montrer que f n'est pas 1-höldérdienne, mais qu'elle est α-höldérdienne pour tout $\alpha \in]0, 1[$.

1. On pourra montrer qu'alors f est dérivable, de dérivée nulle