PCSI – TD$_{42}$

Vésale Nicolas

2017 – 2018

Exercice 1 :

Dans l'application du théorème des accroissements finis à la fonction $f(x) = \alpha\, x^2 + \beta\, x + \gamma$ sur l'intervalle $[a, b]$ préciser le nombre « c » de $]a, b[$. Donner une interprétation géométrique.

Exercice 2 :

Montrer, à l'aide du théorème des accroissements finis, que

$\forall x \in \mathbb{R},\ |\sin x| \leq |x|$, $\qquad \forall x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right],\ 1 - \cos x \leq x \sin x$, $\qquad \forall x \in [-1, 1],\ |\arcsin x| \leq \left|\dfrac{x}{\sqrt{1 - x^2}}\right|$.

Exercice 3 :

Par application du théorème des accroissements finis à $f(x) = \ln x$ sur $[n, n+1]$ montrer que $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ tend vers l'infini quand n tend vers l'infini.

Exercice 4 :

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ dérivable, telle que $f(a) = f(b) = 0$. Montrer que pour tout $d \in \mathbb{R} \setminus [a, b]$ il existe une tangente à la courbe représentative de f passant par le point $(d, 0)$.

Exercice 5 :

Soit f et g continues sur $[a, b]$, dérivables sur $]a, b[$, $f(a) \neq f(b)$ et $g(a) \neq g(b)$. Montrer que :

$$\exists c \in]a, b[, \quad \frac{f'(c)}{f(a) - f(b)} = \frac{g'(c)}{g(a) - g(b)}$$

Exercice 6 :

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ n fois dérivable. Si f s'annule en $n+1$ points distincts de $[a, b]$, montrer que :

$$\exists c \in\ ]a, b[, \quad f^{(n)}(c) = 0.$$

Exercice 7 :

Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ dérivable telle que $\lim\limits_{+\infty} f' = l$. Montrer qu'alors $\lim\limits_{+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = l$.