PCSI – TD$_{41}$

Vésale Nicolas

2017 – 2018

Exercice 1 :

Donner une bijection strictement croissante de :

1. $\mathbb{R}$ sur $]-1,1[$,
2. $]-1,1[$ sur $\mathbb{R}$,
3. $]a,+\infty[$ sur $\mathbb{R}$ $(a \in \mathbb{R})$.

Exercice 2 :

Étudier la dérivabilité des fonctions suivantes :

$$f_1(x) = \begin{cases} x^2 \times \cos\left(\dfrac{1}{x}\right), & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases} \qquad f_2(x) = \begin{cases} \sin(x) \times \sin\left(\dfrac{1}{x}\right), & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}.$$

Exercice 3 :

Soit $f: \ [0,\pi/2] \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \sqrt{\sin x} + x$$

Justifier que f réalise une bijection vers un intervalle à préciser, puis que f^{-1} est continue et dérivable sur cet intervalle.

Exercice 4 :

Soit f et g deux fonctions continues définies sur $[0,1]$. On suppose que : $\forall x \in [0,1], \quad f(x) < g(x)$. Montrer qu'il existe un réel strictement positif a tel que : $\forall x \in [0,1], \quad f(x) + a \leqslant g(x)$.

Exercice 5 :

Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ continue admettant une limite finie en $+\infty$. Montrer que f est bornée. Atteint-elle ses bornes ?

Exercice 6 :

Soit f une fonction continue et dérivable sur $[a,+\infty[$ et telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = f(a)$. Montrer qu'il existe un élément c dans $]a,+\infty[$ tel que $f'(c) = 0$.