

PCSI – TD₄₀

Vésale Nicolas

2017 – 2018

Exercice 1 :

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.

1. si $f = o_{x_0}(g)$ et $g = o_{x_0}(f)$ alors $f = g$ sur un voisinage de x_0 ,
2. si $f \sim_{x_0} g$ alors $f = g$ sur un voisinage de x_0 ,
3. $o_{x_0}(f(x)) - o_{x_0}(f(x)) = 0$, $o_{x_0}(f(x)) - o_{x_0}(f(x)) = o_{x_0}(f(x))$,
4. si f converge vers l , alors $f(x) \sim_{x_0} l$.

Exercice 2 :

1. Une fonction continue sur un intervalle qui ne s'annule pas garde-t-elle un signe constant ?
2. Une fonction continue sur un intervalle peut-elle prendre un nombre fini de valeurs ? Ce nombre peut-il être quelconque ?

Exercice 3 :

Trouver toutes les fonctions continues de \mathbb{R} dans $\mathbb{R} : \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x + y) = f(x) + f(y)$.

Exercice 4 :

À partir de l'exercice précédent :

1. Trouver toutes les fonctions continues de \mathbb{R} dans \mathbb{R}_+^* : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x + y) = f(x) \times f(y)$.
2. Trouver toutes les fonctions continues de \mathbb{R}_+^* dans $\mathbb{R} : \forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^{*2}, f(x \times y) = f(x) + f(y)$.
3. Trouver toutes les fonctions continues de \mathbb{R}_+^* dans $\mathbb{R}_+^* : \forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^{*2}, f(x \times y) = f(x) \times f(y)$.

Exercice 5 :

1. Soit f une fonction continue sur $]a, b[$ telle que $f(]a, b[) \subset [a, b]$. Montrer, par considération de $\phi(x) = f(x) - x$, qu'il existe c dans $[a, b]$ tel que $f(c) = c$.
2. Soit f une fonction continue sur $[0, 1]$ telle que $f(0) = f(1)$. Montrer qu'il existe c dans $[0, 1/2]$ tel que $f(c) = f(c + 1/2)$.
3. Un mobile parcourt, à vitesse continue, une distance d en une unité de temps. Montrer qu'il existe un intervalle d'une demi-unité de temps pendant lequel il parcourt une distance $d/2$.

1. (on pourra commencer par déterminer la restriction de f à \mathbb{N} puis à \mathbb{Z} et \mathbb{Q}).