PCSI – TD_4

Vésale Nicolas

2017 – 2018

Exercice 1 :

On rappelle que, pour α un réel et $x \in \mathbb{R}_+^*$: $x^\alpha \overset{\text{Déf}}{=} \exp(\alpha \times \ln(x))$. Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer l'ensemble de définition maximal :

1. $f_1(x) = (x \times (x-2))^{\frac{1}{3}}$,
2. $f_2(x) = \sqrt{x + \sqrt{x^2+1}}$,
3. $f_3(x) = \sqrt{(x^2+1)^3}$,
4. $f_4(x) = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$,
5. $f_5(x) = \dfrac{1+\sqrt{x}}{(1+x)^{\frac{1}{3}}}$,

Exercice 2 :

Déterminer l'intersection de la droite passant par les points $A = (0,1)$ et $B = (1,0)$ et de la tangente à la courbe de la fonction définie par $f(x) = x^2$ au point $(1, f(1))$.

Exercice 3 :

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Montrer que :

$$f \text{ strictement croissante} \iff (\forall\,(a,b) \in \mathbb{R}^2,\ a \leqslant b \iff f(a) \leqslant f(b)).$$

Exercice 4 :

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifiez.

1. f est bornée sur I si et seulement si $|f|$ est majorée,
2. si f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, alors f admet pour limite $+\infty$ en $+\infty$.

Exercice 5 :

Soit A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E. Montrer que :

1. $\mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B \iff A = B$,
2. $\mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B$,
3. $\mathbb{1}_{A\cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B$.