

PCSI – TD<sub>39</sub>

Vésale Nicolas

2017 – 2018

**Exercice 1 :**

1. La fonction partie entière est-elle constante au voisinage de  $a$  si  $a \in \mathbb{Z}$ ?
2. La fonction  $f : x \mapsto \frac{1}{(x-3)^2}$  est-elle positive, bornée, monotone au voisinage de 3?
3. Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $f(1) > 0$ .  $f$  est-elle strictement positive au voisinage de 1? Justifier.

**Exercice 2 :**

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$  fixé, calculer si elle existe  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+1} + \sqrt{x+2} + \dots + \sqrt{x+n} - n\sqrt{x})$ .

**Exercice 3 :**

Comparer en  $0^+$  (en termes de  $o$ ) les fonctions suivantes :

$$f_1(x) = x \times \ln(x), \quad f_2(x) = \ln(x+1), \quad f_3(x) = x^2 \times e^{\frac{1}{x}}, \quad f_4(x) = \frac{x^3}{\ln(x)}, \quad f_5(x) = e^{\frac{1}{\ln(x)}}.$$

**Exercice 4 :**

Montrer que la fonction exponentielle n'est pas rationnelle, c'est-à-dire qu'il n'existe pas de polynômes  $P$  et  $Q$  tels que  $e^x = P(x)/Q(x)$  pour tout réel  $x$ .

**Exercice 5 :**

Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  croissante. Soit  $c \in ]a, b[$ , montrer que  $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) \leq f(c) \leq \lim_{x \rightarrow c^+} f(x)$ .

**Exercice 6 :**

Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions définies sur  $\mathbb{R}$ . On suppose que  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} l$  et  $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} l'$  et que  $l < l'$ . Montrer que :  $\exists A > 0, \forall x \geq A, g(x) > f(x)$ .

**Exercice 7 :**

Montrer que la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \begin{cases} [x] & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ x & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$  n'admet de limite en aucun point de  $\mathbb{R}$ .