

PCSI – TD<sub>38</sub>

Vésale Nicolas

2017 – 2018

**Exercice 1 :**

Écrire les définitions des limites suivantes :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l, l \in \mathbb{R}$ ;  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty, x_0 \in \mathbb{R}$ . (On précisera sur quel type d'intervalle la fonction  $f$  doit être définie.)

**Exercice 2 :**

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une application. On suppose que  $f$  admet une limite finie  $l > 0$  en  $+\infty$ . Montrer que

$$\exists A > 0, \forall x \in [A, +\infty[, f(x) > 0.$$

Montrer que ce n'est pas vrai si  $l = 0$ .

**Exercice 3 :**

Calculer lorsqu'elles existent les limites suivantes

a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2|x|}{x}$

b)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 2|x|}{x}$

c)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 3x + 2}$

e)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1+x^2}}{x}$

f)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+5} - \sqrt{x-3}$

h)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^n - 1}$

**Exercice 4 :**

Déterminer les limites en  $0^+$  et  $0^-$  des fonctions définies sur  $\mathbb{R}^*$  par les formules suivantes :

$$f(x) = \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor, \quad g(x) = x \times \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor, \quad h(x) = x^2 \times \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor.$$

**Exercice 5 :**

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  périodique admettant une limite finie en  $+\infty$ . Montrer que  $f$  est constante.

**Exercice 6 :**

Soit la fonction réelle définie par  $f(x) = 1$  si  $x \in \mathbb{Q}$  et  $f(x) = 0$  sinon. Montrer que  $f$  n'admet pas de limite en tout point de  $\mathbb{R}$ .