PCSI – TD$_{36}$

Vésale Nicolas

2017 – 2018

Exercice 1 :

Une classe a entre 30 et 45 étudiants. Un professeur remarque que, lorsqu'il fait des groupes de 3 et de 5, il reste un seul étudiant sans groupe. Combien cette classe a-t-elle d'étudiants ?

Exercice 2 :

Soient A et B deux sous ensembles finis d'un ensemble E.

1. Montrer que : $\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B)$.
2. Montrer par récurrence que si $(F_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une famille de sous-ensembles finis de E alors :
$$\text{Card}\left(\bigcup_{i=1}^{n} F_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \text{Card}(F_i)$$
avec égalité si les F_i sont deux à deux disjoints.
3. Déterminer une formule pour $\text{Card}\left(F_1 \cup F_2 \cup F_3\right)$ et $\text{Card}\left(F_1 \cup F_2 \cup F_3 \cup F_4\right)$.

Exercice 3 :

Soit E un ensemble à n éléments. Soit $\mathcal{R}$ une relation sur E. On rappelle que $\mathcal{R}$ est dite :

$$\begin{gathered} \textit{réflexive} \text{ si } \forall x \in E,\ x\mathcal{R}x \\ \textit{symétrique} \text{ si } \forall (x,y) \in E^2,\ x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x \\ \text{et } \textit{transitive} \text{ si } \forall (x,y,z) \in E^3,\ x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}z \Rightarrow x\mathcal{R}z \end{gathered}$$

et qu'on dit que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur E si elle a ces trois propriétés. Combien y a-t-il de relations sur E qui sont :

1. réflexives ?
2. symétriques ?
3. réflexives et symétriques ?
4. Montrer que B_n, le nombre de relations d'équivalence de E, est égal au nombre de partitions de E.
5. On pose $B_0 = 1$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ B_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times B_k$. En déduire le nombre de relations d'équivalence sur un ensemble à 15 éléments.