

PCSI – TD₃₃

Vésale Nicolas

2017 – 2018

Exercice 1 :

Calculer, si cela est possible, les inverses des matrices suivantes (avec la méthode du Pivot de Gauss) :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 9 & 7 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 2 :

On considère les matrices suivantes : $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer P^{-1} puis $D = P^{-1} \times A \times P$.
2. Soit n un entier positif non nul. Déterminer D^n .
3. Montrer que $A^n = P \times D^n \times P^{-1}$ et déduire A^n sous forme explicite.

Exercice 3 :

On considère la matrice suivante : $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$.

1. Montrer que si $a \neq 1$ et $a \neq -2$, alors A est inversible et déterminer son inverse.
2. Écrire le système suivant :

$$\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = b \\ x + y + az = 1 \end{cases}$$

sous forme matricielle. Déduire de la question précédente que si $a \neq 1$ et $a \neq -2$, ce système possède une solution unique et la déterminer.

Exercice 4 :

De la même façon, traiter les matrices associées aux systèmes du dernier exercice du *TD* précédent. Calculer les solutions des systèmes proposés, dans le cas où elles sont uniques.