PCSI – TD$_{31}$

Vésale Nicolas

2017 – 2018

Exercice 1 :

La somme de deux matrices inversibles est-elle toujours inversible ?

Exercice 2 :

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.Calculer $A^3 - A$. En déduire que A est inversible puis déterminer A^{-1}.

Exercice 3 :

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. Montrer que : $A \times \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = (a \times d - b \times c).I_2$. En déduire que A est inversible si et seulement si $a \times d - b \times c \neq 0$ et une formule pour A^{-1} dans ce cas.

Exercice 4 :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$; on suppose que A^2 est une combinaison linéaire de A et I_n : $A^2 = \alpha.A + \beta.I_n$.

1. Montrer que A^k est également une combinaison linéaire de A et I_n pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
2. Montrer que si β est non nul, alors A est inversible et que A^{-1} est encore combinaison linéaire de A et I_n.
3. Application 1 : soit $A = J_n - I_n$, où J_n est la matrice Attila (envahie par les uns...), avec $n \geqslant 2$. Montrer que $A^2 = (n-2).A + (n-1).I_n$; en déduire que A est inversible, et déterminer A^{-1}.
4. Application 2 : montrer que si $n = 2$, A^2 est toujours une combinaison linéaire de A et I_2, et retrouver la formule donnant A^{-1} en utilisant la question 2.

Exercice 5 :

Une matrice carrée réelle A est dite *stochastique* si tous ses coefficients sont éléments de $[0, 1]$ et la somme des coefficients de chaque colonne vaut 1. Montrer que le produit de deux matrices stochastique est aussi une matrice stochastique.

Exercice 6 :

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ et $\zeta = \exp\left(\frac{2\,i \times \pi}{n}\right)$. On pose $A = \left(\zeta^{(k-1)\times(\ell-1)}\right)_{1 \leqslant k, \ell \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Calculer $A \times \overline{A}$. En déduire que A est inversible et calculer A^{-1}.