# PCSI – TD$_{29}$

Vésale Nicolas

2017 – 2018

## Exercice 1 :

Montrer que les suites suivantes, définies par leur terme général sont divergentes :

$$a_n = \cos\left(\frac{n\times\pi}{4}\right), \quad b_n = \frac{2+n\times\sin\left(\frac{n\times\pi}{2}\right)}{n\times\cos\left(\frac{\pi}{4}+n\times\frac{\pi}{2}\right)}.$$

## Exercice 2 :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle croissante telle que $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

## Exercice 3 :

On pose, pour $n\in\mathbb{N}^*$ : $u_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

1. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est décroissante.
2. Établir que : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ u_{2n}\leqslant \dfrac{u_n}{2}+\dfrac{1}{2\sqrt{n+1}}$. En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n$.

## Exercice 4 :

Déterminer toutes les suites bornées $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui vérifient : $u_{n+2} = 3\,i\times u_{n+1}+2\,u_n$.

## Exercice 5 :

Étudier la suite définie par : $u_0 = 7/4, \quad \forall n\in\mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \sqrt{2-u_n}$.

## Exercice 6 :

Soient $\rho\in\mathbb{R}_+$ et $\theta\in]-\pi,\pi]\setminus\{0\}$. On considère la suite complexe $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$z_0 = \rho\times e^{i\,\theta} \quad \text{et} \quad \forall n\in\mathbb{N}, \quad z_{n+1} = \frac{z_n+|z_n|}{2}.$$

1. Exprimer le module et un argument de $z_{n+1}$ en fonction de ceux de $z_n$. En déduire une expression de $z_n$ sous la forme d'un produit.
2. Montrer que : $\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\times\cos\left(\dfrac{\theta}{4}\right)\times\cdots\times\cos\left(\dfrac{\theta}{2^n}\right) = \dfrac{\sin(\theta)}{2^n\times\sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right)}$. En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} z_n$.