PCSI – TD$_{27}$

Vésale Nicolas

2017 – 2018

Exercice 1 :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite qui tend vers une limite strictement positive lorsque n tend vers $+\infty$. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement positive à partir d'un certain rang.

Exercice 2 :

Déterminer d'éventuelles limites des suites (u_n) définies par :

1. $u_n = \dfrac{\sin n + \cos n}{n+1}$
2. $u_n = \dfrac{\sin n}{n + (-1)^{n+1}}$,
3. $u_n = \dfrac{n!}{n^n}$,
4. $u_n = \dfrac{n - (-1)^n}{n + (-1)^n}$,
5. $u_n = \dfrac{e^n}{n^n}$,
6. $u_n = \sqrt[n]{2 + (-1)^n}$.

On pourra dans chaque que cas chercher un encadrement.

Exercice 3 :

Déterminer d'éventuelles limites des sommes suivantes :

1. $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}$
2. $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2 + k^2}$
3. $S_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k^2}$
4. $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2 + k}$
5. $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2 + k}}$
6. $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} k!$

Exercice 4 :

Étudier la limite si elle existe de :

$$u_n = \frac{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}{\sqrt{n}}, \qquad v_n = \frac{\lfloor x \rfloor + \lfloor 2\,x \rfloor + \cdots + \lfloor n\,x \rfloor}{n} \quad \text{où } x \text{ désigne un réel fixé.}$$