PCSI – TD_{25}

Vésale Nicolas

2017 – 2018

Exercice 1 :

Donner une expression explicite des suites réelles suivantes :

1. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1, u_1 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = 4\,u_{n+1} - 4\,u_n$,
2. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1, u_1 = -1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 2\,u_{n+2} = 3\,u_{n+1} - u_n$,
3. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1, u_1 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = u_{n+1} - u_n$.

Exercice 2 :

Soit $\theta \in]0, \pi[$. Déterminer une expression explicite de la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = u_1 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} - 2\,\cos\theta \times u_{n+1} + u_n = 0.$$

Exercice 3 :

Soit (u_n) et (v_n) les suites déterminées par $u_0 = 1$, $v_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = 3\,u_n + 2\,v_n \quad \text{et} \quad v_{n+1} = 2\,u_n + 3\,v_n$$

1. Montrer que la suite $(u_n - v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.
2. Prouver qu'il existe des réels a et b tels que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = a \times u_n + b.$$
3. Donner des formules explicites pour les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 4 :

Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ vérifiant [1]

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(f(x)) = 6\,x - f(x).$$

1. On pourra considérer la suite définie par $u_0 = x \in \mathbb{R}_+^*$, et pour tout n, $u_{n+1} = f(u_n)$.