PCSI – TD_{24}

Vésale Nicolas

2017 – 2018

Exercice 1.1 :

Tracer le graphe des fonctions suivantes sur $[0;2]$:

$$f(x) = \lfloor x^2 + 1 \rfloor, \quad g(x) = \lfloor x^2 \rfloor + 1.$$

Exercice 1.2 :

Soit $x \in \mathbb{R}$, exprimer :

$$m(x) = \min\{n \in \mathbb{Z}, \quad n \geqslant x\}$$

à l'aide de la fonction partie entière.

Exercice 2 :

Soient a et b deux rationnels positifs tels que $\sqrt{a}$ et $\sqrt{b}$ soient irrationnels. Montrer que $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ est irrationnel.

Exercice 3 :

Soit f une fonction réelle à valeurs réelle qui vérifie :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x + y) = f(x) + f(y).$$

1. Montrer que $f(0) = 0$.
2. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \quad f(n \times x) = n \times f(x)$.
3. En déduire que : $\forall x \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{Z}, \quad f(k \times x) = k \times f(x)$.
4. En déduire que : $\forall q \in \mathbb{Q}, \quad f(q) = q \times f(1)$.
5. On suppose de plus que f est croissante. Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = x \times f(1).$$

Exercice 4 : (ENS)

Soit $f : [0, 1] \to [0, 1]$, croissante. Montrer que f admet un point fixe : $\exists a \in [0, 1], \; f(a) = a.$ [1]

1. On pourra considérer la borne supérieure de l'ensemble $A = \{x \in [0, 1], \; f(x) \geqslant x\}$.