

PCSI – TD₂₂

Vésale Nicolas

2017 – 2018

Exercice 1 :

Étant donné un ensemble $A \subset \mathbb{R}$, écrire avec des quantificateurs les propriétés suivantes :

1. 10 est un majorant de A ,
2. m est un minorant de A ,
3. P n'est pas un majorant de A ,
4. A n'est pas minoré,
5. A est borné,
6. A n'est pas borné.

Exercice 2 :

Pour chacun de des ensembles :

$$A = \{x \in \mathbb{R}, |x - 2| \leq 1\}, \quad B = \{x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 1\}, \quad C = \{x \in \mathbb{R}, x^3 < 1\}$$

$$D = \left\{x \in \mathbb{R}_+^*, \frac{1}{x^2} \leq 1\right\}, \quad E = \left\{x \in \mathcal{D}_{x^2-x-2}, \frac{x^2-2x-9}{x^2-x-2} \leq 1\right\}, \quad F = \left\{x \in \mathbb{R}_+^*, \sin(x) \leq \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$$

$$G = \{x \in \mathbb{R}_+^*, \sin(1/x) \leq 0\}, \quad H = \{x \in \mathbb{R}, 3|x-1| \leq 2|x+2|\}.$$

1. L'écrire comme une réunion d'intervalles.
2. Déterminer si il possède un maximum, un minimum, une borne supérieure ou inférieure.

Exercice 3 :

Soient A et B deux parties bornées de \mathbb{R} . On note $A + B = \{a + b \mid (a, b) \in A \times B\}$.

1. Montrer que $\sup A + \sup B$ est un majorant de $A + B$.
2. Montrer que $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$.

Exercice 4 :

Soit A et B deux parties bornées de \mathbb{R} . Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1. $A \subset B \Rightarrow \sup A \leq \sup B$,
2. $A \subset B \Rightarrow \inf A \leq \inf B$,
3. $\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)$,
4. $\sup(A + B) < \sup A + \sup B$,
5. $\sup(-A) = -\inf A$,
6. $\sup A + \inf B \leq \sup(A + B)$.