PCSI – TD$_{17}$

Vésale Nicolas

2017 – 2018

Exercice 1 :

Montrer que, pour $p \leqslant n$, on a : $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$ de deux façons :

1. Par récurrence sur n,
2. en utilisant la relation du triangle de Pascal pour se ramener à une suite télescopique.

Exercice 2 :

Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer

$$\sum_{k=0}^{n} k \times \binom{n}{k} \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} \times \binom{n}{k}.$$

Exercice 3 :

Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer les sommes suivantes :

$$\sum_{(i,j)\in[\![0,n]\!]^2} 2^{i+j}, \qquad \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=i}^{n} \binom{j}{i}, \qquad \sum_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq n}} \max(i,j).$$

Exercice 4 :

Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

1. Écrire $\cos(6\,\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$.
2. Montrer qu'il n'existe pas de fonction $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ telle que :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad \sin(6\,\theta) = f(\sin(\theta)).$$

Exercice 5 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\theta \in \mathbb{R} \setminus \pi \times \mathbb{Z}$. Calculer :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \cos\left((2\,k+1) \times \theta\right).$$