PCSI – TD_{16}

Vésale Nicolas

2017 – 2018

Exercice 1 :

Soient $p \leq q$ entiers naturels.

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique. Montrer que : $\displaystyle\sum_{k=p}^{q} u_k = \frac{u_p+u_q}{2} \times (q-p+1)$.
2. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison r. Calculer $\displaystyle\sum_{k=p}^{q} v_k$.

Exercice 2 :

Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer les sommes suivantes :

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} 2^k; \quad B_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}; \quad C_n = \sum_{i=2}^{n} 2^i \times 3^{i+1}; \quad D_n = \sum_{i=0}^{2n} 6^i; \quad E_n = \sum_{l=0}^{n} 6^{2\,l}.$$

Pour $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k \quad \text{et} \quad g(x) = \sum_{k=1}^{n} k \times x^{k-1}.$$

Exercice 3 :

Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer les quantités suivantes (on précisera au besoin à partir de quelles valeurs de n elles sont valables) :

$$\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k}{k+1}\right), \quad \sum_{k=2}^{n} \ln\left(\frac{k^2}{(k-1)\times(k-2)}\right), \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+2)\times(k+3)}, \prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right), \sum_{k=2}^{n} k\times k!.$$

Exercice 4 :

Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $A_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k$; $B_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2$; $C_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3$.

1. Rappeler la valeur de A_n,
2. En développant $(k+1)^3 - k^3$, trouver une relation entre A_n et B_n. En déduire B_n.
3. Sur le même modèle, calculer C_n.