PCSI – TD$_{15}$

Vésale Nicolas

2017 – 2018

Exercice 1 :

Soit $\theta \in]-\pi, \pi]$. Représenter sous forme exponentielle les complexes :

$$z_1 = -7 + 8\,i, \quad z_2 = \left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i}\right)^{20}, \quad z_3 = -\cos(\theta) + \sin(\theta)\,i, \quad z_4 = i + e^{i\,\theta}.$$

Exercice 2 :

Comment choisir l'entier naturel n pour que $(\sqrt{3} + i)^n$ soit un réel positif ? Un imaginaire pur ?

Exercice 3 :

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tels que $a + b + c = \pi$. Montrer que :

$$\cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c + 2\,\cos a \times \cos b \times \cos c = 1,$$

$$-1 + \cos a + \cos b + \cos c = 4\,\sin\left(\frac{a}{2}\right) \times \sin\left(\frac{b}{2}\right) \times \sin\left(\frac{c}{2}\right).$$

Exercice 4 :

Résoudre les équations :

1. $\cos(x) + \cos(7\,x) = \cos(4\,x)$,
2. $\cos(x) + \cos(2\,x) + \cos(3\,x) = 0$,
3. $\cos(\sin(x)) = \sin(\cos(x))$.

Exercice 5 :

Calculer $\cos\left(\dfrac{\pi}{10}\right)$.

Exercice 6 :

1. Soit $\alpha \in \mathbb{U}_5 \setminus \{1\}$. Montrer que $(\alpha^2 + \alpha + 1) \times (\alpha^3 + \alpha + 1) \times (\alpha^4 + \alpha + 1) = \alpha \times (\alpha + 1)$.
2. Soit $\beta \in \mathbb{U}_7 \setminus \{1\}$. Montrer que $\dfrac{\beta}{1 + \beta^2} + \dfrac{\beta^2}{1 + \beta^4} + \dfrac{\beta^3}{1 + \beta^6} = -2$.

Exercice 7 :

Résoudre dans $\mathbb{C}$:

1. $i\,z^2 + (4i-3)\,z + i - 5 = 0$,
2. $(1+i)\,z^2 - (5+i)\,z + 6 + 4\,i = 0$,
3. $z^2 + (1+3\,j) \times z + 8 + j = 0$,
4. $z^5 + 1 = 0$,
5. $16\,(z-1)^4 + (z+1)^4 = 0$,
6. $z^5 = z + \bar{z}$,
7. $e^{2\,z} = \sqrt{6} + i\,\sqrt{18}$.

Exercice 8 :

Soit A et B deux points distincts du plan d'affixes respectives a et b. Quelles sont les affixes de C et D pour que $ABCD$ soit un carré ?

Exercice 8bis :

Soit A et C deux points distincts du plan d'affixes respectives a et c. Quelles sont les affixes de B et D pour que $ABCD$ soit un carré ?

Exercice 9 :

Soit $ABCD$ un parallélogramme. On construit sur chaque côté un carré de centres respectifs P , Q, R et S. Montrer que $PQRS$ est un carré.

Exercice 10 :

On considère l'application définie par :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad F(z) = z^2.$$

1. Déterminer les points fixes de F.
2. Démontrer que tout point M' de $\mathbb{C}$ possède deux antécédents par F, M_1 et M_2, symétriques par rapport à O. L'application f est-elle injective, surjective, bijective ?
3. Justifier la construction suivante de l'image M' d'un point M :
   (a) (Om') est la demi-droite symétrique de (Ox) par rapport à (OM).
   (b) sur la demi-droite (Om''), opposée à (Om'), A est le point tel que $OA = 1$.
   (c) N est l'un des points de la droite passant par O et orthogonale à (Om') tel que $ON = OM$.
   (d) la droite passant par N et orthogonale à (AN) coupe (Om') en M' .
4. Quelle est l'image par F :
   (a) de la droite O_x ?
   (b) de la droite O_y ?
   (c) d'un cercle de centre O ?
5. Déterminer l'image par F de la droite d'équation $x = \alpha$, avec $\alpha \neq 0$ fixé. L'application F conserve-t-elle l'alignement ?

Exercice 11 :

Montrer que l'application réciproque :

1. d'une similitude directe est une similitude directe,
2. d'une similitude indirecte est une similitude indirecte.